Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Торгово-экономический институт

МАТЕМАТИКА

Методические указания к выполнению контрольных работ
для студентов направления подготовки 38.03.06 «Торговое дело»
всех профилей заочной формы обучения

Красноярск 2017

УДК 5(076.5)
Математика: Методические указания к выполнению контрольных работ для студентов направления подготовки «Торговое дело» всех профилей заочной формы обучения / Сост.: ст. преподаватель Раковская С.А., Сиб. федерал. ун-т, Красноярск. – 2017. – 124 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Математические дисциплины имеют важное значение как для всего процесса обучения в университете, так и для последующей деятельности специалиста. Они необходимы для успешного освоения многих специальных дисциплин.

Цель изучения математических дисциплин состоит в освоении студентами основ математического, развитии навыков логического и алгоритмического мышления, привитии умения самостоятельно изучать прикладную математическую литературу, выработке умения моделировать реальные процессы, освоении приемов исследования и решения математически формализованных задач.

Данные методические указания к выполнению контрольных работ для студентов направления подготовки 38.03.06 «Торговое дело» всех профилей заочной формы обучения соответствуют программе.

В настоящих методических указаниях приводятся рекомендации по изучению разделов и тем курса «Математика» и варианты контрольных работ, которые должны выполнить студенты в процессе изучения курса.

Номер варианта и задания должны оканчиваться на одну и ту же цифру, что и учебный шифр студента (номер зачетной книжки).

Контрольная работа выполняется в тонкой тетради. Решения задач следует располагать в порядке возрастания номеров. Условия задач выписывать обязательно.

Приступая к выполнению контрольной работы, сначала следует изучить теоретический материал и ознакомиться с решением типовых задач, приведенных в настоящих методических указаниях. Решения задач должны быть оформлены аккуратно, с подробными пояснениями и с указанием используемых формул. В результате проверки преподаватель делает одно из двух заключений относительно выполненной работы: «допущен к защите» и «не допущен к защите». Студент обязан исправить в ней все отмеченные рецензентом ошибки и сдать работу на повторную проверку.

Тема 1. Матрицы и определители

Матрицы, основные понятия и определения

В практической деятельности матрицы имеют широкое применение в различных областях. Например, удобно записывать в виде матриц данные о выпуске продукции разного типа, об объемах производства или продаж за несколько отчетных периодов или о нормах затрат различных видов ресурсов на производство единицы продукции и т.д. Также часто используется понятие матриц и при математической постановке задач оптимального планирования, приводимых к системам линейных уравнений.

Матрицей A *размера* $m \times n$ называется прямоугольная таблица элементов, которая записывается в круглых скобках, т.е. имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

где a_{ij} – элементы матрицы (действительные числа),

m – число строк;

n – число столбцов;

i – номер строки, $i = \overline{1, m}$;

j – номер столбца, $j = \overline{1, n}$.

Матрицу (1.1) можно обозначать $A_{m \times n} = (a_{i\,j})$.

Две матрицы A и B называются *равными* $(A = B)$, если они имеют одинаковые размеры и их соответствующие элементы равны.

Матрица (1.1) называется *квадратной*, если $m = n$. Другими словами это матрица размера $n \times n$.

В квадратной матрице элементы с одинаковыми индексами $a_{i\,i}$ $(i = \overline{1, n})$ образуют *главную диагональ*, перпендикулярно ей расположены элементы, образующие *побочную диагональ*.

Квадратная матрица называется *диагональной*, если все ее элементы кроме элементов главной диагонали – нули, т.е. матрица вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \ldots 0 \\ 0 & a_{22} \ldots 0 \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 \ldots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица называется *единичной* (обозначается *E*), если все элементы главной диагонали – единицы, т.е.: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 \ldots 0 \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 \ldots 1 \end{pmatrix}$.

Квадратная матрица называется *треугольной*, если все ее элементы под главной диагональю или над ней – нули, т.е. матрицы вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Операции над матрицами

Линейные операции над матрицами

Над матрицами можно производить ряд операций, причем некоторые из них аналогичны операциям с числами, а некоторые специфические.

Алгебраической суммой матриц A и B одинаковой размерности называется матрица $C = A \pm B$ того же размера, элементы которой равны $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.

Пример 1.1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Найти $C = A + B$ и $D = A - B$.

Решение: $C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, а $D = A - B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Произведением матрицы A *на действительное число* γ называется матрица, каждый элемент которой получен умножением соответствующего элемента матрицы A на число γ:

$$\gamma \cdot A = (\gamma \cdot a_{ij}).$$

Пример 1.2. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти $2 \cdot A$.

Решение: При умножении матрицы на число $\gamma = 2$ все ее элементы умножаются на это число, следовательно, будем иметь: $2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

Произведение матриц

Можно умножать лишь матрицы, у которых число столбцов в матрице, стоящей в произведении слева равно числу строк в матрице, стоящей в произведении справа.

Произведением матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{n\times p} = (b_{jk})$ называется матрица $C_{m\times p} = (c_{ik})$, где элементы $c_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$, т.е. элемент c_{ik} матрицы C равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

Замечание. Произведение матриц *не коммутативно*, т.е. $A \times B \neq B \times A$.

Пример 1.3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Найти $C = A \cdot B$.

Решение: Число столбцов в матрице A равно числу строк в матрице B. Чтобы получить элемент c_{11} нужно найти сумму произведений элементов первой строки матрицы A на соответствующие элементы первого столбца матрицы B. Для вычисления значения элемента c_{12} нужно сложить произведения элементов первой строки матрицы A на соответствующие элементы второго столбца матрицы B и т.д., т.е. будем иметь:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + (-1)\cdot 1 + 2\cdot 2 & 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 2\cdot(-2) \\ 0\cdot 0 + 2\cdot 1 + 3\cdot 2 & 0\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot(-2) \\ 1\cdot 0 + 4\cdot 1 + 1\cdot 2 & 1\cdot 1 + 4\cdot 1 + 1\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 8 & -4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрица A^T, полученная из матрицы A путем замены строк на столбцы с теми же номерами, называется *транспонированной матрицей*.

Пример 1.4. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Записать транспонированную матрицу A^T.

Решение: При транспонировании заменяем строки столбцами с теми же номерами, т.е. для матрицы A транспонированной A^T будет матрица вида: $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Определители

Понятие *определителя матрицы* существует только для *квадратных* матриц.

Пусть дана матрица размером 2×2, т.е: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, ее элементы определяют *число* $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$, которое называется *определителем второго порядка*, соответствующим матрице A (записывают определитель в прямых скобках). Обозначают определитель:

$$\det A = \Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \qquad (1.2)$$

Пример 1.5. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ найти определитель.

Решение: $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 = -7$.

Матрице третьего порядка соответствует *определитель третьего порядка*, который вычисляется по формуле:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \qquad (1.3)$$

Таким образом, определитель третьего порядка равен сумме произведений трех его элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Эти произведения берутся с определенными знаками: с тем же знаком – три члена, состоящие из элементов главной диагонали и элементов, расположенных в вершинах треугольников с основаниями параллельными главной диагонали; с противоположным знаком – три члена, расположенные аналогичным образом относительно побочной диагонали. Поэтому этот способ вычисления определителя третьего порядка называют «правилом треугольников».

Пример 1.6. Вычислить определитель третьего порядка $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$.

Решение: $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} =$

$$= 1 \cdot 0 \cdot (-1) + 6 \cdot 4 \cdot (-3) + 2 \cdot (-2) \cdot 3 - 3 \cdot 0 \cdot (-3) - 4 \cdot (-2) \cdot 1 - 6 \cdot 2 \cdot (-1) =$$

$$= -72 - 12 + 8 + 12 = -64.$$

Свойства определителей:

1^0. При транспонировании матрицы ее определитель не изменяется.

2^0. При перестановке соседних строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.

3^0. Определитель равен нулю, если все элементы строки (столбца) определителя равны нулю.

4^0. Определитель равен нулю, если имеются несколько строк (столбцов) с пропорциональными (в частности равными) элементами.

5^0. Общий множитель всех элементов строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

6^0. Значение определителя не изменится, если к элементам его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число γ.

Замечание. Для определителей третьего и более высоких порядков справедливы еще *два свойства*, которые дают другие способы вычисления определителей.

Для дальнейшего изложения необходимо ввести понятия алгебраических дополнений A_{ij} и миноров M_{ij} для элемента a_{ij}.

Минором M_{ij} для элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из исходного вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется *минор* M_{ij}, взятый с определенным знаком, а именно: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

7^0. (Теорема о разложении). Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Определитель можно *разложить по элементам любой строки (столбца).* Например, разложение определителя третьего порядка по i-ой строке дает формула:

$$\Delta = |A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3},$$

где A_{ij} - алгебраические дополнения соответствующих элементов a_{ij}.

8^0. Если определитель имеет треугольный или диагональный вид (определитель, записанный для треугольной или диагональной матрицы), то он равен произведению элементов его главной диагонали. Например:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ 0 & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \quad \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Указание. Для приведения определителя к треугольному виду следует воспользоваться свойством 6^0.

Пример 1.7. Для определителя из примера 6 найти M_{23} и A_{21}.

Решение: Чтобы найти M_{23} вычеркнем мысленно в данном определителе вторую строку и третий столбец, получим определитель второго порядка:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2.$$

Для нахождения A_{21} необходимо M_{21} умножить на $(-1)^{2+1}$, т.е. $A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21}$, следовательно $A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -(-2+12) = -10$.

Пример 1.8. Вычислить определитель из примера 6 разложением по второй строке:

Решение: $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 6 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} - 2 \cdot A_{23} =$

$$= 6 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -60 + 2 \cdot (-2) = -64.$$

Определители для удобства вычислений можно приводить к треугольному виду, применяя свойства.

Пример 1.9. Вычислить определитель из примера 6, приведя его к треугольному виду.

Решение:

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix}1&2&-3\\6&0&-2\\3&4&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&-3\\0&-12&16\\0&-2&8\end{vmatrix}=-(-2)\cdot 4\cdot\begin{vmatrix}1&2&-3\\0&1&-4\\0&-3&4\end{vmatrix}=8\cdot\begin{vmatrix}1&2&-3\\0&1&-4\\0&0&-8\end{vmatrix}=-64.$$

Здесь в первом определителе элементы первой строки умножили на –6 и прибавили к соответствующим элементам второй; элементы первой же строки умножили на –3 и прибавили к соответствующим элементам третьей строки (свойство 6). Получили второй определитель, в котором элементы второй и третьей строк имеют общий множитель, которые вынесены за знак третьего определителя (свойство 5): из второй строки вынесен множитель 4, а из третьей –2, также вторую и третью строки поменяли местами и поменяли перед определителем знак (свойство 2). В третьем определителе элементы второй строки умножили на 3 и прибавили к соответствующим элементам третьей. Получили определитель треугольного вида (все элементы под главной диагональю равны нулю), который равен произведению элементов на главной диагонали (свойство 8).

Обратная матрица

Матрица называется *обратной* для матрицы A (обозначается A^{-1}), если для нее выполняются равенства:

$$A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E. \qquad (1.4)$$

Алгоритм вычисления обратной матрицы:

1. Вычислить определитель матрицы $|A|$. Если $|A|=0$, то матрица A - *вырожденная* (*особенная*) и обратной для нее не существует, если $|A|\neq 0$, то – *неособенная или невырожденная* и для нее можно найти A^{-1}.
2. Записать транспонированную матрицу A^T для матрицы A.
3. Вычислить *присоединенную* матрицу $\overline{A}$, элементами которой являются алгебраические дополнения для элементов транспонированной матрицы.
4. Вычислить обратную матрицу по формуле:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\overline{A}. \qquad (1.5)$$

Пример 1.10. Для матрицы $A=\begin{pmatrix}3&-2\\5&-4\end{pmatrix}$ найти обратную матрицу A^{-1}. Сделать проверку.

Решение: применим описанный выше алгоритм нахождения A^{-1}.

1. Вычисляем определитель: $|A|=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{vmatrix}=-12+10=-2\neq 0,$ следовательно, матрица *неособенная* или *невырожденная*.

2. Запишем транспонированную матрицу A^T для матрицы A:

$$A^T=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -2 & -4\end{pmatrix}$$

3. Вычислим *присоединенную* матрицу $\overline{A}$. Для этого найдем алгебраические дополнения для всех элементов транспонированной матрицы:

$$A_{11}=(-1)^2\cdot(-4)=-4 \qquad A_{12}=(-1)^3\cdot(-2)=2$$

$$A_{21}=(-1)^3\cdot 5=-5 \qquad A_{22}=(-1)^4\cdot 3=3.$$

Запишем присоединенную матрицу $\overline{A}=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ -5 & 3\end{pmatrix}$.

4. Вычислим обратную матрицу по формуле (1.5): $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot\overline{A}$.

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 2\\ -5 & 3\end{pmatrix}.$$

Проверка. Воспользуемся определением (1.4) обратной матрицы: $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$. Найдем произведение

$$A^{-1}\cdot A=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4 & 2\\ -5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-12+10 & 8-8\\ -15+15 & 10-12\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Пример 1.11. Для матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$ найти обратную матрицу A^{-1}. Сделать проверку.

Решение:

1. Вычисляем определитель $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$ следовательно, матрица A *неособенная или невырожденная*.

2. Запишем транспонированную матрицу A^T для матрицы A: $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Вычислим *присоединенную* матрицу $\overline{A}$; для этого найдем алгебраические дополнения для всех элементов транспонированной матрицы.

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 11 \qquad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10 \qquad A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 4 \qquad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3.$$

Итак, присоединенная матрица имеет вид: $\overline{A} = \begin{pmatrix} 11 & -10 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

4. Запишем обратную матрицу, используя формулу (1.5): $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \overline{A}$.

$$A^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 11 & -10 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Проверка. Воспользуемся определением (1.4) обратной матрицы: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$. Найдем произведение

$$A^{-1} \cdot A = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 11 & -10 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 11-20+3 & 33-30-3 & 11-20+9 \\ -4+4+0 & -12+6+0 & -4+4+0 \\ -5+8-3 & -15+12+3 & -5+8-9 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Тема 2. Системы линейных алгебраических уравнений

Система вида:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\tag{2.1}$$

называется *системой линейных уравнений* (СЛУ), где

x_j - переменные или неизвестные;

a_{ij} - коэффициенты при неизвестных системы, где $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$;

b_i - свободные члены.

Решением СЛУ называется упорядоченный набор значений переменных, при подстановке которых в систему вместо переменных, каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Решить систему, значит – найти все ее решения, или доказать, что их нет.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Если система не имеет решений, то она называется *несовместной*.

Две системы называются *эквивалентными*, если они имеют одно и то же решения.

Матричная форма записи системы уравнений

Для системы (2.1) введем следующие обозначения:

Матрица A, составленная из коэффициентов при неизвестных системы

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\\ a_{m1} & a_{m2}\ldots a_{mn}\end{pmatrix}$$ - называется *матрицей системы*; матрица-столбец

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{- } \textit{матрицей неизвестных}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \text{– } \textit{матрица свободных членов}.$$

Система (2.1) может быть записана в *матричной форме* или в виде *матричного уравнения*:

$$A \cdot X = B. \tag{2.2}$$

Решение этого матричного уравнения заключается в отыскании такой матрицы X, которая при данных матрицах A и B обращает это уравнение в верное матричное равенство.

Дополним матрицу A системы (2.1) столбцом свободных членов. Полученная матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

называется *расширенной матрицей* системы.

Методы решения систем уравнений

I. Метод обратной матрицы (матричный метод).

Пусть в системе линейных уравнений (2.1) $m = n$, тогда она имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \tag{2.4}$$

или в матричной форме

$$A \cdot X = B, \tag{2.5}$$

где A - квадратная матрица. Пусть матрица A является невырожденной, т.е. для нее существует обратная матрица A^{-1}, тогда, умножив обе части равенства (2.5) слева на A^{-1} и учитывая определение (1.4) будем иметь:

$$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B\ ,$$

$$E\cdot X = A^{-1}\cdot B,$$

$$X = A^{-1}\cdot B. \qquad (2.6)$$

Итак, для нахождения решения СЛУ вида (2.4) необходимо найти A^{-1} для невырожденной квадратной матрицы системы A и воспользоваться формулой (2.6).

Пример 2.1. Решить систему матричным методом $\begin{cases} x_1+3x_2+\ x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+2x_3=2 \\ x_1-\ x_2+\ 3x_3=0 \end{cases}$

.

Решение: Для данной системы: матрица системы $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,

матрицы-столбцы свободных членов $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ и неизвестных $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Для нахождения решения по формуле (2.6), необходимо найти для матрицы A обратную, которая уже найдена в примере 11 темы 1:

$$A^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 11 & -10 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, решение $X=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 11 & -10 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$.

Итак, $x_1=1{,}5;\ x_2=0;\ x_3=-0{,}5$, или $(1{,}5;\ 0;\ -0{,}5)$.

II. Метод Крамера (решение СЛУ по формулам Крамера).

Пусть Δ - определитель матрицы системы (2.4), а Δ_j - определитель, полученный из определителя Δ заменой j-го столбца столбцом свободных членов B. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то система (2.4) имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \text{ где } j = \overline{1,n}. \qquad (2.7)$$

Формулы (2.7) называют *формулами Крамера.*

Замечание: если определитель матрицы системы $\Delta = 0$ и при этом все $\Delta_j = 0$, то система имеет бесконечное множество решений. Если же $\Delta = 0$ и хотя бы один из определителей $\Delta_j \neq 0$, то система несовместна.

Пример 2.2. Решить систему по формулам Крамера

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2. \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение: Для данной системы формулы Крамера (2.7) будут иметь вид: $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$, где $j = \overline{1,3}$. Вычислим $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$. Следовательно, система имеет единственное решение.

Вычислим все три Δ_j, которые получаются из определителя Δ заменой j–го столбца столбцом свободных членов B.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -9; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{-6} = 0; \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}.$$

Итак, $(1{,}5;\ 0;\ -0{,}5)$.

Полученное решение совпадает с решением этой же системы матричным методом (пример 1).

III. Метод Гаусса и Жордана-Гаусса.

Решение системы методом обратной матрицы и по формулам Крамера часто оказывается трудоемкой задачей и применимо лишь когда $m = n$, более универсальный и эффективный метод (легко реализуемый на компьютере) – метод Гаусса или метод Жордана-Гаусса.

В основе этих методов лежат *элементарные преобразования систем*, в результате которых, из исходной системы уравнений получают эквивалентную ей систему специального вида, а именно: с матрицей треугольного (метод Гаусса) или диагонального (метод Жордана-Гаусса) вида.

К элементарным преобразованиям систем относятся:

1) перестановка строк;
2) умножение всех элементов строки на число $\lambda \neq 0$;
3) прибавление к элементам любой строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на число $\lambda \neq 0$;
4) исключение из матрицы нулевой строки.

За*мечание*. Если в процессе преобразований получается строка, которой соответствует уравнение вида: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b \neq 0$, то система несовместна.

Применяя эти методы, следует записать расширенную матрицу СЛУ и с помощью элементарных преобразований привести матрицу системы к треугольному виду (метод Гаусса), где все элементы ниже главной диагонали станут нулевыми. Затем записать СЛУ и с помощью так называемого «обратного хода» найти неизвестные. А именно: из последнего уравнения определяют неизвестное. Найденное значение подставляют в предыдущее уравнение и решают его, и т.д. продолжают находить все неизвестные СЛУ.

Преобразовывая расширенную матрицу системы по методу Жордана-Гаусса, добиваются того, чтобы матрица СЛУ имела диагональный вид. Далее записывают СЛУ по преобразованной матрице, и все неизвестные будут определены.

Решение СЛУ методом Гаусса

Пример 2.3. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \ x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2. \\ x_1 - \ x_2 + \ 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение: Запишем расширенную матрицу системы и приведем к треугольному виду матрицу системы, используя элементарные преобразования. Желательно, чтобы элементы главной диагонали равнялись единицам.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Вторая, эквивалентная матрица получена следующим образом: 1-ю строку умножили на -2 и прибавили ко второй строке; 1-ю строку умножили на -1 и прибавили к третьей строке. Третья матрица получена делением на -3 второй строки. Четвертая матрица получена умножением на 4 второй строки и прибавлением ее к третьей строке. Последняя, пятая матрица получена делением элементов третьей строки на 2. Итак, матрица системы (первые три столбца) имеет треугольный вид, причем элементы, расположенные на главной диагонали равны единицам.

После преобразований число оставшихся уравнений равно 3, и число неизвестных тоже три, следовательно, система имеет единственное решение. По последней матрице восстановим систему уравнений и «обратным ходом» найдем решение:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \ x_3 = 1 \\ \qquad x_2 \qquad = 0 \\ \qquad\qquad x_3 = -1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3 \cdot 0 - 1/2 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3/2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1/2 \end{cases} \text{ или } (1{,}5;\ 0;\ -0{,}5).$$

Решение совпадает с решениями, полученными ранее другими методами.

Решение СЛУ методом Жордана-Гаусса

Пример 2.4. Решить систему уравнений методом Жордана-Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2. \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение: Решая этим методом необходимо преобразовать расширенную матрицу системы так, чтобы привести к диагональному виду матрицу системы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\tfrac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \tfrac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\tfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Здесь вторая и третья матрицы получены, так же как и по методу Гаусса.

В четвертой матрице во втором столбце все элементы, кроме a_{22}, должны равняться нулю. Поэтому четвертая матрица получена из третьей следующим образом: элементы второй строки умножаются на -3 и прибавляются к первой; элементы второй строки умножаются на 4 и прибавляются к третьей. Далее элементы третьей строки в четвертой матрице умножаются на $\frac{1}{2}$, чтобы элемент a_{33} стал равен 1. Так получили пятую матрицу. Теперь нужно добиться, чтобы элементы третьего столбца, все кроме a_{33} стали равны 0. Следует заметить, что элемент a_{23} уже равен 0, поэтому вторую строку не преобразовываем, а к первой прибавляем третью, умноженную на -1, тем самым получаем шестую матрицу, где на месте матрицы системы (три первых столбца) расположении диагональная, а именно – единичная E матрица. Восстановив систему по последней матрице, сразу получаем решение: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Решения, полученные всеми методами совпадают. Ответ: $\left(\dfrac{3}{2};\quad 0;\quad -\dfrac{1}{2}\right)$.

Замечание. Решение можно было оформлять в виде таблицы, т.е. решение удобнее находить с использованием *таблиц Гаусса*.

Решение СЛУ с использованием таблиц Гаусса.

Первая таблица для решаемой системы заполняется следующим образом: в столбцах x_i выписываются коэффициенты при соответствующих переменных; в столбце B - свободные члены. В первой таблице выбирается *ведущий элемент* – любой из ненулевых коэффициентов при неизвестных, желательно равный единице. Строка и столбец, где выбран ведущий элемент также называются *ведущими.* Заполнение каждой следующей таблицы начинаем с ведущей строки. В новую таблицу выписываются элементы ведущей строки из предыдущей таблицы, деленные на ведущий элемент. Все элементы ведущего столбца, кроме ведущего который стал равен единице, обнуляются, используя, например, элементарные преобразования или *правило прямоугольника* (смотри ниже). В новой таблице опять выбираем ведущий элемент только в строке, которая до сих пор не была ведущей. Продолжаем до тех пор, пока все строки не побывают ведущими.

Правило прямоугольника: Чтобы пересчитать новое значение элемента a'_{ij}, нужно вернуться в предыдущую таблицу и мысленно нарисовать прямоугольник так, чтобы пересчитываемый элемент a_{ij} и ведущий a^* располагались на одной его диагонали, тогда на другой диагонали будут располагаться элементы A и B. Новое значение вычисляется по формуле:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a^* - A \cdot B}{a^*} = a_{ij} - \frac{A \cdot B}{a^*}. \tag{2.8}$$

Задачи с экономическим содержанием

Понятие матриц широко применяется при решении практических задач. Применяя известные действия с матрицами, можно определить объемы производства или продаж за несколько отчетных периодов, прирост производства или продаж по сравнению с предыдущим периодом, выручку, стоимость затрат и т.п.

Пример 2.5. В трех магазинах продаются два типа продукции. Матрицы A_1, A_2 и A_3 – объемы продаж этой продукции в магазинах в первом, втором и третьем месяцах соответственно (усл. ед.). Цена реализации одной условной единицы первого и второго типа продукции задана матрицей B (ден. ед.). Определить: 1) матрицу A - объем продаж за квартал; 2) матрицу C - прирост продаж за третий месяц по сравнению со вторым; 3) выручку каждого магазина за квартал. Проанализировать результаты.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Решение:

1) Объем продаж за квартал – есть сумма матриц A_1, A_2 и A_3, т.е.

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 17 & 18 \\ 18 & 22 \end{pmatrix}.$$

Итак, первый магазин продаст продукции первого типа за квартал на 12 усл. ед., второго типа на 15 усл. ед. Объем продаж второго магазина за квартал продукции первого и второго типа составит соответственно 17 и 18 усл. ед., а третьего 18 и 22 усл.ед.

2) Прирост в третьем месяце по сравнению со вторым для трех магазинов определяется разностью матриц A_3 и A_2, причем положительные элементы показывают, что объем продаж увеличился, отрицательные – уменьшился, нулевые – не изменился.

$$C = A_3 - A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, в третьем месяце по сравнению со вторым в первом магазине объем продаж продукции первого типа увеличился на 1усл. ед. второго типа – на 2. Второй магазин в третьем месяце объем продаваемой продукции первого типа увеличил на 1 усл. ед., а продукции второго типа продал на 1 усл. ед. меньше, чем во втором месяце. У третьего магазина уменьшился объем продаваемой продукции первого типа на 1 усл. ед., а второго типа – не изменился.

3) Выручка каждого магазина за квартал определяется матрицей D.

$$D = A \cdot B = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 17 & 18 \\ 18 & 22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \cdot 5 + 15 \cdot 3 \\ 17 \cdot 5 + 18 \cdot 3 \\ 18 \cdot 5 + 22 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 105 \\ 139 \\ 156 \end{pmatrix}.$$

Итак, выручка от реализации всей продукции за квартал для первого магазина составила 105 ден. ед., для второго – 139 ден. ед. и для третьего – 156 ден. ед.

Пример 2.6. Обувная фабрика специализируется по выпуску изделий трех видов: сапог, кроссовок и ботинок; при этом ежедневно используется сырье трех типов: S_1, S_2 и S_3, которое должно быть израсходовано полностью. Нормы расхода каждого из них на изготовление одной пары обуви и объем расхода сырья за один день заданы в таблице.

Вид сырья	Нормы расхода сырья на изготовление одной пары, усл.ед.			Расход сырья за один день, усл.ед.
	сапог	кроссовок	ботинок	
S_1	5	3	4	2700
S_2	2	1	1	900
S_3	3	2	2	1600

Необходимо:

1) составить систему уравнений для нахождения ежедневного объема выпуска каждого вида обуви;

2) решить эту систему по формулам Крамера;

3) решить систему матричным методом;

4) решить систему, применяя таблицы Гаусса.

Решение: Введем обозначения: пусть ежедневно фабрика выпускает x_1 пар сапог, x_2 пар кроссовок и x_3 пар ботинок.

1) в соответствии с расходом сырья каждого вида получим систему:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2700 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 900 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1600 \end{cases}.$$

2) для решения этой системы по формулам Крамера составим и вычислим определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 9 + 16 - 12 - 12 - 10 = 1;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2700 & 3 & 4 \\ 900 & 1 & 1 \\ 1600 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 100 \cdot \begin{vmatrix} 27 & 3 & 4 \\ 9 & 1 & 1 \\ 16 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 100\,(54 + 48 + 72 - 64 - 54 - 54) = 200;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2700 & 4 \\ 2 & 900 & 1 \\ 3 & 1600 & 2 \end{vmatrix} = 100 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 27 & 4 \\ 2 & 9 & 1 \\ 3 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 100\,(90 + 81 + 128 - 108 - 108 - 80) = 300;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2700 \\ 2 & 1 & 900 \\ 3 & 2 & 1600 \end{vmatrix} = 100 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 & 27 \\ 2 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 16 \end{vmatrix} = 100\,(80 + 81 + 108 - 81 - 96 - 90) = 200.$$

Замечание. При вычислении определителей Δ_i применяли свойство 5^0.

Найдем решение системы по формулам (2.7):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{200}{1} = 200; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{300}{1} = 300; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{200}{1} = 200.$$

Следовательно, решение системы имеет вид: (200; 300; 200).

3) для данной системы уравнений матрица системы $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

матрицы-столбцы свободных членов $B = \begin{pmatrix} 2700 \\ 900 \\ 1600 \end{pmatrix}$ и неизвестных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Для нахождения решения по формуле (2.6), необходимо найти для матрицы A обратную. Выполним все четыре пункта алгоритма нахождения A^{-1}:

1. $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1$;

2. $A^T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

3. Найдем алгебраические дополнения для всех элементов A^T:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Итак, присоединенная матрица имеет вид: $\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Вычислим обратную матрицу по формуле (1.5): $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \overline{A}$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, решение $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2700 \\ 900 \\ 1600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix}$.

Итак, $x_1 = 200;\ \ x_2 = 300;\ \ x_3 = 200$, или $(200;\ 300;\ 200)$.

4) заполним первую таблицу Гаусса (Т.1), используя коэффициенты при неизвестных системы и столбец свободных членов уравнений.

x_1	x_2	x_3	B	
5	3	4	2700	
2	[1]	1	900	Т.1
3	2	2	1600	
-1	0	[1]	0	
2	1	1	900	Т.2
-1	0	0	-200	
-1	0	1	0	
3	1	0	900	Т.3
[-1]	0	0	-200	
0	0	1	200	
0	1	0	300	Т.4
1	0	0	200	

Отсюда, восстановив систему по Т.4, получим:

$$\begin{cases} x_3 = 200 \\ x_2 = 300 \\ x_1 = 200 \end{cases} \text{или} \quad (200;\ 300;\ 200).$$

Итак, фабрика выпускает 200 пар сапог, 300 пар кроссовок и 200 пар ботинок.

Тема 3. Уравнение прямой на плоскости

Аналитическая геометрия – это раздел математики, изучающий геометрические объекты средствами алгебры. Основным методом аналитической геометрии является метод координат, который позволяет геометрические задачи сводить к алгебраическим. Считается, что система координат введена, если указан способ, позволяющий установить положение точки заданием чисел.

Декартова прямоугольная система координат на плоскости вводится следующим образом. Выберем масштаб для измерения длин отрезков. В данной плоскости проведем две взаимно перпендикулярные оси: горизонтальная Ox (ось абсцисс) и вертикальная Oy (ось ординат). Точка O пересечения координатных осей называется *началом координат*. *Декартовыми прямоугольными координатами* точки M на плоскости называются два числа, равные расстояниям, взятым с определенным знаком, от этой точки до осей соответственно Oy и Ox.

Расстояние ρ между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ находится по формуле:

$$\rho = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \tag{3.1}$$

Деление отрезка в заданном отношении. Рассмотрим две различные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Если точка $M(x, y)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, считая от точки M_1 т.е. $\lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|}$, то ее координаты определяются формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \tag{3.2}$$

в частности, если точка $M(x, y)$ является серединой отрезка M_1M_2, т.е. $\lambda=1$, из (3.2) получим формулы деления отрезка пополам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{3.3}$$

Уравнением линии на плоскости, относительно выбранной системы координат называется такое уравнение $F(x, y) = 0$, которому удовлетворяют координаты любой точки данной линии и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на этой линии.

Уравнения прямой на плоскости задаются алгебраическими уравнениями первой степени относительно декартовых координат:

1) Общее уравнение прямой:

$$Ax+By+C=0, \text{ где } A^2+B^2\neq 0; \qquad (3.4)$$

2) Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, имеет вид:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}; \qquad (3.5)$$

Замечание. Если знаменатель одной из дробей в (3.5) равен нулю, то прямые параллельны осям координат и задаются уравнениями или $x=x_1$ или $y=y_1$.

3) Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y=kx+b; \qquad (3.6)$$

4) Уравнение прямой, проходящей через заданную точку и имеющей данный угловой коэффициент:

$$y-y_1=k(x-x_1). \qquad (3.7)$$

Если две прямые заданы уравнениями: $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, то *тангенс угла φ между двумя прямыми* определяется по формуле:

$$tg\varphi=\pm\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|, \qquad (3.8)$$

где знак выбирается в зависимости от того, острый или тупой угол между прямыми нужно найти.

Необходимое и достаточное условие параллельности выражается равенством:

$$k_1=k_2. \qquad (3.9)$$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямых выражается равенством: $k_1\cdot k_2=-1$ или

$$k_2=-\frac{1}{k_1}. \qquad (3.10)$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0,y_0)$ *до прямой* $Ax+By+C=0$ можно определить по формуле:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (3.11)$$

Для нахождения *точки пересечения прямых* l_1 и l_2 необходимо решить систему уравнений, соответствующих уравнениям данных прямых.

Пример 3.1. Даны вершины A (–2; 3), B (1; 12), C (11; 6) треугольника ABC. Найти:

1) уравнение стороны AB;

2) длину стороны AB;

3) уравнение высоты, опущенной из вершины C;

4) длину этой высоты;

5) уравнение прямой, параллельной стороне AB, проходящей через вершину C;

6) площадь треугольника;

7) уравнение медианы, опущенной из вершины C;

8) точку пересечения высот;

9) внутренний угол треугольника ABC;

10) сделать чертеж.

Решение:

1) Для нахождения уравнения стороны AB воспользуемся уравнением прямой, проходящим через две точки. Подставим в (3.5) координаты точек A и B:

$$\frac{y-3}{12-3}=\frac{x-(-2)}{1-(-2)};\qquad \frac{y-3}{9}=\frac{x+2}{3}\qquad \text{или}\qquad \frac{y-3}{3}=\frac{x+2}{1};$$

$y-3=3x+6$ или $3x-y+9=0$ – получено общее уравнение прямой AB.

2) Длину стороны AB найдем по формуле расстояния между двумя точками. Подставим в (3.1) координаты точек $A(-2;3)$ и $B(1;12)$

$$d=|AB|=\sqrt{(1+2)^2+(12-3)^2}=\sqrt{9+81}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}\ \text{ед.}$$

3) Высота CD, проведенная к стороне AB перпендикулярна ей ($CD \perp AB$), и поэтому, чтобы воспользоваться условием перпендикулярности (3.10) запишем уравнение прямой AB: $3x-y+9=0$ в виде уравнения прямой с

угловым коэффициентом (3.6) $y = 3x + 9$. Следовательно, $k_{AB} = 3$. Угловые коэффициенты k_{CD} и k_{AB} удовлетворяют условию (3.10), т.е.:

$$k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}},$$

следовательно, угловой коэффициент высоты *CD* будет равен $k_{CD} = -\frac{1}{3}$.

Напишем уравнение высоты *CD*, используя уравнение прямой, проходящей через заданную точку и имеющей данный угловой коэффициент: Подставляя в **(**3.7**)** координаты точки *C*(11; 6) и угловой коэффициент $k_{CD} = -\frac{1}{3}$ получим:

$$y - 6 = -\frac{1}{3}(x - 11), \quad 3y - 18 = -x + 11, \quad x + 3y - 18 - 11 = 0, \text{ или}$$

$x + 3y - 29 = 0$ – общее уравнение прямой *CD*.

4) Длину высоты *CD*, найдем как расстояние от точки *C*(11; 6) до прямой *AB*: $3x - y + 9 = 0$, используя формулу (3.11):

$$d = |CD| = \frac{|3 \cdot 11 - 1 \cdot 6 + 9|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{36}{\sqrt{10}} = \frac{36\sqrt{10}}{10} = \frac{18\sqrt{10}}{5}.$$

5) Уравнение прямой *CL*, параллельной стороне *AB,* проходящей через вершину *C* напишем, используя условие параллельности (3.9), т.е. $k_{CL} = k_{AB} = 3$. В уравнение (3.7) подставим координаты точки *C*(11; 6) и значение углового коэффициента $k_{CL} = 3$, получим: $y - 6 = 3(x - 11)$, или $y = 3x - 27$.

Итак, $3x - y - 27 = 0$ - общее уравнение прямой *CL*.

6) Площадь треугольника найдем по формуле:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{10} \cdot \frac{18\sqrt{10}}{5} = 54 \text{ ед}^2.$$

7) Для нахождения уравнения медианы *CM*, найдем координаты точки *M*. Точка *M* делит сторону *AB* пополам, тогда по формулам деления отрезка пополам (3.3) координаты точки *M* будут равны :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2} = -0{,}5, \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3+12}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5.$$

Уравнение медианы *CM* получим, подставив координаты точек *C*(11; 6) и *M*(-0,5; 7,5) в формулу (3.5):

$$\frac{y-6}{7{,}5-6} = \frac{x-11}{-0{,}5-11}; \qquad \frac{y-6}{1{,}5} = \frac{x-11}{-11{,}5}; \qquad \frac{y-6}{3} = \frac{x-11}{-23};$$

$$-23y + 138 = 3x - 33 \quad \text{или} \quad 3x - 33 + 23y - 138 = 0$$

Итак: $3x + 23y - 171 = 0$ – общее уравнение медианы *CM*.

8) Для нахождения точки пересечения высот треугольника *ABC* необходимо найти уравнение еще одной высоты, например проведенной из вершины *A*, т.к. все три высоты пересекаются в одной точке. Найдем уравнение высоты *AF* аналогично тому, как находили уравнение высоты *CD* в пункте 3). Для этого напишем уравнение стороны *BC* по формуле (3.5), используя координаты точек *B*(1; 12) и *C*(11; 6), тогда

$$\frac{y-12}{6-12} = \frac{x-1}{11-1}; \qquad \frac{y-12}{-6} = \frac{x-1}{10}; \qquad \frac{y-12}{-3} = \frac{x-1}{5},$$

или $5(y-12) = -3(x-1)$, $y = -\frac{3}{5}(x-1) + 12$.

Следовательно, для прямой *BC* угловой коэффициент $k_{BC} = -\frac{3}{5}$. Угловой коэффициент прямой *AF* из условия (3.10) будет: $k_{AF} = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{1}{-\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$.

Подставляя в (3.7) координаты точки *A*(-2; 3) и угловой коэффициент $k_{AF} = \frac{5}{3}$, получим уравнение высоты *AF*: $y - 3 = \frac{5}{3}(x+2)$; или

$$3y - 9 = 5x + 10; \qquad 5x + 10 - 3y + 9 = 0;$$

Итак, $5x-3y+19=0$ – общее уравнение высоты *AF*.

Решая систему уравнений, соответствующих прямым *CD* и *AF*, найдем точку пересечения высот:

$$+\begin{cases} x+3y-29=0 \\ 5x-3y+19=0 \end{cases},$$

$$6x-10=0, \qquad 6x=10, \qquad x=\frac{5}{3}.$$

Подставим в первое уравнение системы и получим:

$$\frac{5}{3}+3y-29=0, \qquad 3y=29-\frac{5}{3}=\frac{87-5}{3}=\frac{82}{3}; \qquad y=\frac{82}{9}.$$

Итак, точка *E* пересечения высот имеет координаты $E\left(\frac{5}{3}; \frac{82}{9}\right)$

9) Для нахождения угла *ABC* используем формулу (3.8), где k_1 – угловой коэффициент прямой *AB* и k_2 - угловой коэффициент прямой *BC*, т.е.

$$k_1=k_{AB}=3, \qquad k_2=k_{BC}=-\frac{3}{5}=-0{,}6\ ,$$

причем по рисунку видно, что этот угол φ меньше $\frac{\pi}{2}$, следовательно, $tg\varphi$ должен быть положительным.

Итак, $tg\varphi=\left|\frac{-0{,}6-3}{1-1{,}8}\right|=\left|\frac{-3{,}6}{-0{,}8}\right|=\frac{9}{2}=4{,}5$ или $\varphi=arctg\,4{,}5$.

10) Выполним чертеж в прямоугольной декартовой системе координат:

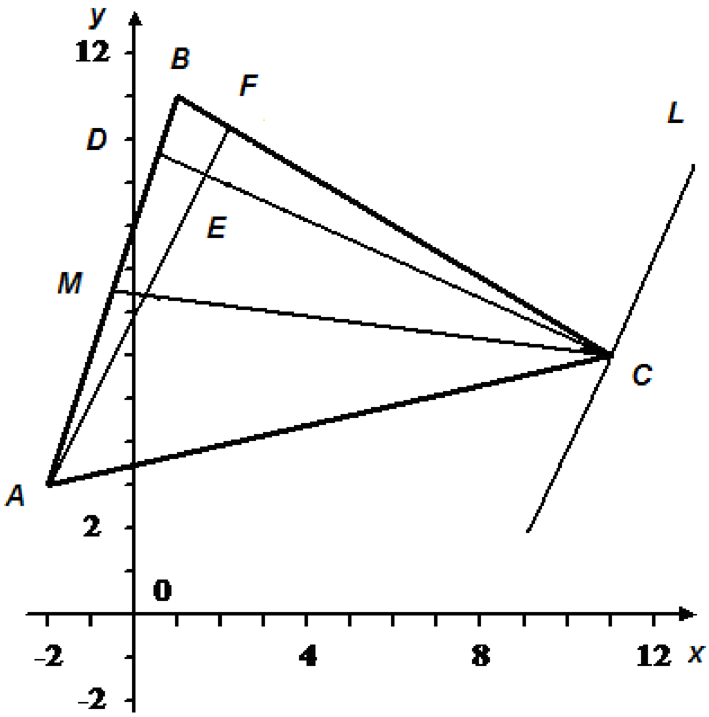

Рис. 1

Тема 4. Предел функции

Во многих разделах математики используется понятие *предела*, который обозначается $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и означает следующее: предел функции $f(x)$ при стремлении x к x_0 равен A. Значения A и x_0 могут быть как конечными, так и бесконечными.

Свойства пределов:

Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, причем A и B конечны, то

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x) \right) = A \pm B;$$

$$\lim_{x \to x_0} c\, f(x) = c\, A \quad \text{при} \quad c = const$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = A \cdot B$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad \text{при} \ B \neq 0.$$

Понятие бесконечно больших и бесконечно малых функций:

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, то функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при стремлении x к x_0.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$, то функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при стремлении x к x_0.

Функция, обратная бесконечно малой, является бесконечно большой, и наоборот, т.е.

если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{\alpha(x)}=\infty$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

Вычисление предела отношения двух бесконечно малых или двух бесконечно больших функций называется раскрытием неопределенности. Основным методом раскрытия неопределенностей является сокращение множителя, вызывающего неопределенность, а также используют два замечательных предела.

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ – первый замечательный предел.

$\lim\limits_{x\to x_0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ или $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ – второй замечательный предел в двух различных формах. Иррациональное число $e\approx 2{,}72$ является основанием натуральных логарифмов.

Следствия:

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1+\dfrac{ax+в}{c}\right)^{\frac{c}{ax+в}}=e$ или б) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1+\dfrac{c}{ax+в}\right)^{\frac{ax+в}{c}}=e$

Пример 3.1. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+x-10}{2x^2+7x+6}$.

Решение: Подстановка предельного значения аргумента $x=-2$ приводит к неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ отношения двух бесконечно малых, необходимо предварительно разложить числитель и знаменатель на линейные множители, т.е. $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 $\boldsymbol{x_2}$ – корни квадратного трехчлена.

$$3x^2+x-10=0,\quad D=1+4\cdot 3\cdot 10=121=11^2,$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm 11}{6},\ x_1=-2,\ x_2=\frac{5}{3},$$

$$2x^2+7x+6=0,\ D=49-4\cdot 2\cdot 6=1,$$

$$x_{1,2}=\frac{-7\pm 1}{4},\ x_1=-2,\ x_2=-\frac{3}{2}.$$

Тогда, сокращая числитель и знаменатель на общий множитель, будем иметь:

$$\lim_{x\to -2}\frac{3x^2+x-10}{2x^2+7x+6}=\lim_{x\to -2}\frac{3(x+2)\left(x-\frac{5}{3}\right)}{2(x+2)\left(x+\frac{3}{2}\right)}=\lim_{x\to -2}\frac{3x-5}{2x+3}=\frac{3\cdot(-2)-5}{2\cdot(-2)+3}=\frac{-11}{-1}=11.$$

Следует заметить, что x только стремится к своему предельному значению -2**,** но не совпадает с ним. Следовательно, множитель, на который сокращается дробь $\boldsymbol{(x+2)}$, отличен от нуля.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+8}{4-2x-8x^2}$. При $\boldsymbol{x\to\infty}$ получаем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Решение: Чтобы найти предел дробной рациональной функции, необходимо разделить числитель и знаменатель дроби почленно на старший член числителя или знаменателя и применить основные теоремы о пределах:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{8}{x^2}}{\frac{4}{x^2}-\frac{2x}{x^2}-\frac{8x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}+\frac{8}{x^2}}{\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}-8}=-\frac{3}{8}.$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$.

Решение:

Подстановка предельного значения $x=0$ приводит к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, домножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю $(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-2x})$, и вынесем общий множитель в знаменателе:

$$\lim_{x\to 0}\ \frac{\left(\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}\right)\left(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-2x}\right)}{x(x+1)(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-2x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\ \frac{(1+3x)-(1-2x)}{x(x+1)(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-2x})}=\lim_{x\to 0}\ \frac{1-3x-1+2x}{x(x+1)(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-2x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\ \frac{-x}{x(x+1)(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-2x})}=\frac{-1}{(0+1)(\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0})}=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}.$$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\ \left(\dfrac{3n+3}{3n+2}\right)^{2n-1}.$

Решение: При подстановке в числитель и знаменатель выражения предельного значения получим неопределенность вида $(\mathbf{1}^{\infty})$. Раскроем эту неопределенность следующим образом. Выделим в числителе выражение такое же, как в знаменателе, и почленно разделим числитель на знаменатель:

$$\lim_{n\to\infty}\ \left(\frac{3n+2+1}{3n+2}\right)^{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\ \left(1+\frac{1}{3n+2}\right)^{2n-1}.$$

Используя следствие б) 2-го замечательного предела и свойства степеней, можем записать предел следующим образом:

$$\left[\lim_{n\to\infty}\ \left(1+\frac{1}{3n+2}\right)^{\frac{3n+2}{1}}\right]^{\frac{1}{3n+2}\ (2n-1)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty 0}\frac{2n-1}{3n+2}}=e^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{e^2}.$$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\ (3n+4)\left[ln(2n+1)-ln(2n+3)\right]=$

Используем свойства логарифмов и получим

$$=\lim_{n\to\infty}\ (3n+4)\ ln\ \frac{2n+1}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\ ln\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{3n+4}=ln\ \lim_{n\to\infty}\ \left(\frac{2n+3-2}{2n+3}\right)^{3n+4}=$$

$$=ln\ \lim_{n\to\infty}\ \left(1+\frac{-2}{2n+3}\right)^{3n+4}=ln\left[\lim_{n\to\infty}\ \left(1+\frac{-2}{2n+3}\right)^{\frac{2n+3}{-2}}\right]^{\frac{-2}{2n+3}\cdot(3n+4)}=$$

$$=ln\,e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+2}}=ln\,e^{-3}=-3ln\,e=-3.$$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\ \dfrac{1-cos\,7x}{x\cdot cos\,3x}.$

Используя, известную из тригонометрии формулу $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$, имеем $1-\cos 7x = 2\cdot\sin^2\frac{7}{2}x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin^2\frac{7}{2}x}{x\cdot\sin 3x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin^2\frac{7}{2}x}{x\cdot\sin 3x}\cdot\frac{x}{x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin^2\frac{7}{2}x}{x^2\cdot\sin 3x} =$$

$$= 2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{7}{2}x}{x}\cdot\frac{\frac{7}{2}}{\frac{7}{2}}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{3\sin^3 x} = 2\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{7}{2}x}{\frac{7}{2}x}\right)^2\cdot\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x} =$$

$$= 2\cdot\frac{49}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot(1)^2\cdot 1 = \frac{49}{6}.$$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{x\,tg\,2x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{x\,tg\,2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{x^2}\cdot\frac{x\cdot\cos 2x}{\sin 2x} =$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}\cdot\frac{5}{5}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\cos 2x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x}\cdot\frac{2}{2} =$$

$$= 5^2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\right)^2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x} = 25\cdot 1^2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{25}{2}.$$

Тема 5. Производная

Понятие производной возникло в результате решения таких задач, как задача о проведении касательной к кривой или о вычислении скорости неравномерного движения.

Пусть $y = f(x)$ есть непрерывная функция аргумента x, определённая на некотором интервале. Зададим аргументу x произвольное приращение (изменение) Δx такое, что $x+\Delta x$ также принадлежит этому интервалу. Функция получит приращение $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$ (при условии, что этот предел существует).

Производную обозначают y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$.

Итак, по определению,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (5.1)$$

Если для некоторого значения x выполняется условие $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ или $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$, то говорят, что функция имеет бесконечную производную.

Если функция в точке x имеет конечную производную, то функция называется *дифференцируемой в* этой *точке*. Функция, дифференцируемая во всех точках интервала, называется *дифференцируемой на* этом *интервале.*

Нахождение производной функции называется *дифференцированием* функции.

Дифференциалом (*первого порядка*) функции $y = f(x)$ называется главная часть её приращения, линейная относительно приращения аргумента. Дифференциалом аргумента называется приращение аргумента: $dx = \Delta x$.

Дифференциал функции равен произведению её производной на дифференциал аргумента:

$$dx = y'dx. \qquad (5.2)$$

Производная сложной функции: если дана сложная функция $y = f(u)$, где $u = u(x)$ и функции $f(u)$ и $u(x)$ - дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции существует и равна производной данной функции по промежуточному аргументу *u*, умноженной на производную самого промежуточного аргумента по независимой переменной *x*, т.е.

$$y_x' = f_u' \cdot u_x'. \qquad (5.3)$$

Производная от функции в точке x есть функция от x, т.е. $f'(x)$ обозначает функцию, $f'(x_0)$ обозначает число - производную от функции в точке x_0. Если производная от $f'(x)$ существует, то она называется *второй производной* от $f(x)$ и обозначается $f''(x)$.

Подобным образом определяется *производная n-го порядка* $f^{(n)}(x)$, которая является производной от производной $(n-1)$- го порядка.

Геометрический смысл производной: производная $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент (тангенс угла наклона) касательной, проведённой к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, т.е. $tg\alpha = f'(x_0)$, где α-угол, образованный касательной с положительным направлением оси *Ox*.

Тогда уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 примет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{5.4}$$

Основные правила дифференцирования

Пусть даны функции $u = u(x),\ v = v(x)$ *и* $c = const$.

$$c' = 0 \tag{5.5}$$

$$x' = 1 \tag{5.6}$$

$$(c \cdot u)' = c \cdot u' \tag{5.7}$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

(5.8)

$$(u \cdot v)' = u'v + uv' \tag{5.9}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{5.10}$$

Основные формулы дифференцирования

	Производные основных элементарных функций	Производные сложных функций, $u=u(x)$ – произвольная функция
1	$c'=0, \qquad c=const$	
2	$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$	$\left(u^n\right)' = nu^{n-1}u'$
3	$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
4	$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\left(a^u\right)' = a^u \ln a\, u'$
5	$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(e^u\right)' = e^u u'$
6	$\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$	$\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u\ln a}$
7	$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$	$\left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}$
8	$\left(\sin x\right)' = \cos x$	$\left(\sin u\right)' = u'\cos u$
9	$\left(\cos x\right)' = -\sin x$	$\left(\cos u\right)' = -u'\sin u$
10	$\left(tg\, x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left(tg\, u\right)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
11	$\left(ctg\, x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\left(ctg\, u\right)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
12	$\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
13	$\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
14	$\left(arctg\, x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\left(arctg\, u\right)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
15	$\left(arcctg\, x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$\left(arcctg\, u\right)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

Пример 5.1. Составить уравнение касательной к кривой $y = x^3 + x - 1$ в точке $x_0 = 2$.

Решение. В соответствии с формулой (5.3) уравнение касательной в точке $x_0 = 2$ примет вид $y = f(2) + f'(2)(x-2)$. Найдём производную функции, применяя правила дифференцирования,

$y' = \left(x^3 + x - 1\right)' = \left(x^3\right)' + x' - 1' = 3x^2 + 1$. Вычислим значения функции и её производной в заданной точке $f(2) = 2^3 + 2 - 1 = 9$, $f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 1 = 13$. Уравнение касательной $y = 9 + 13(x-2)$ или $y = 13x - 17$.

Пример 5.2. Найти производные и дифференциалы заданных функций:

$a)\ y = \left(x^4 - \dfrac{2}{x\sqrt{x}} + 3\right)^5$, $\qquad$ $в)\ y = \dfrac{1 + 2x^2}{2 - x^3}$,

$б)\ y = tg^3\sqrt{x+2}$, $\qquad$ $г)\ y = 3^{arcsin\sqrt{x}} + x\,ln\left(x^2 + 1\right)$.

Решение. $a)\ y = \left(x^4 - \dfrac{2}{x\sqrt{x}} + 3\right)^5 = \left(x^4 - 2x^{-\frac{3}{2}} + 3\right)^5$.

Сначала преобразуем функцию, затем дифференцируем, применяя формулу производной степенной функции $\left(u^n\right)' = nu^{n-1}u'$, где $u = x^4 - \dfrac{2}{x\sqrt{x}} + 3$, n=5.

$$y' = 5\left(x^4 - 2x^{-\frac{3}{2}} + 3\right)^4\left(x^4 - 2x^{-\frac{3}{2}} + 3\right)' = 5\left(x^4 - 2x^{-\frac{3}{2}} + 3\right)^4\left(4x^3 - 2\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}}\right) =$$

$$= 5\left(x^4 - \frac{2}{x\sqrt{x}} + 3\right)^4\left(4x^3 + \frac{3}{\sqrt{x^5}}\right).$$

$$dy = 5\left(x^4 - \frac{2}{x\sqrt{x}} + 3\right)^4\left(4x^3 + \frac{3}{\sqrt{x^5}}\right)dx.$$

$б)\ y = tg^3\sqrt{x+2}$.

Применим формулу из предыдущего примера, т.к. функция является степенной $y = u^3$, $u = tg\sqrt{x+2}$. При нахождении производной u' применяем формулу $(tgu)' = \dfrac{u'}{cos^2 u}$, где $u = \sqrt{x+2}$, которая так же является степенной

функцией. $$y' = 3tg^2\sqrt{x+1}\left(tg\sqrt{x+2}\right)' = 3tg^2\sqrt{x+1}\frac{1}{\cos^2\sqrt{x+2}}\left(\sqrt{x+2}\right)' =$$

$$= 3tg^2\sqrt{x+1}\frac{1}{cos^2\sqrt{x+2}}\frac{1}{2\sqrt{x+2}} = \frac{3tg^2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+2}\,cos^2\sqrt{x+2}}.$$

$$dy = \frac{3tg^2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+2}\,cos^2\sqrt{x+2}}dx.$$

в) $y = \dfrac{1+2x^2}{2-x^3}$. Дифференцируем как частное по формуле (4.9).

$$y' = \frac{\left(1+2x^2\right)'\left(2-x^3\right) - \left(1+2x^2\right)\left(2-x^3\right)'}{\left(2-x^3\right)^2} = \frac{4x\left(2-x^3\right) - \left(1+2x^2\right)\left(-3x^2\right)}{\left(2-x^3\right)^2} =$$

$$= \frac{8x - 4x^4 + 3x^2 + 6x^4}{\left(2-x^3\right)^2} = \frac{2x^4 + 3x^2 + 8x}{\left(2-x^3\right)^2}.$$

$$dy = \frac{2x^4 + 3x^2 + 8x}{\left(2-x^3\right)^2}dx.$$

г) $y = 3^{arcsin\sqrt{x}} + x\,ln\left(x^2+1\right).$

Применяем формулу производной показательной функции $\left(a^u\right)' = a^u\,ln\,a \cdot u'$, а для второго слагаемого формулу (5.8). Затем используем формулы $(arc\,sin\,u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ и $(ln\,u)' = \dfrac{u'}{u}$.

$$y' = \left(3^{arcsin\sqrt{x}}\right)' + \left(x\,ln\left(x^2+1\right)\right)' = 3^{arcsin\sqrt{x}}\,ln3\,\left(arcsin\sqrt{x}\right)' + (x)'\,ln\left(x^2+1\right) +$$

$$+ x\left(ln\left(x^2+1\right)\right)' = 3^{arcsin\sqrt{x}}\,ln3\frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{\sqrt{1-x}} + ln\left(x^2+1\right) + x\frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1} =$$

$$= 3^{arcsin\sqrt{x}}\,ln3\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} + ln\left(x^2+1\right) + \frac{2x^2}{x^2+1} = 3^{arcsin\sqrt{x}}\,\frac{ln3}{2\sqrt{x(1-x)}} + ln\left(x^2+1\right) + \frac{2x^2}{x^2+1}.$$

$$dy = \left(3^{arcsin\sqrt{x}}\,\frac{ln3}{2\sqrt{x(1-x)}} + ln\left(x^2+1\right) + \frac{2x^2}{x^2+1}\right)dx.$$

Тема 6. Функции нескольких переменных

Если каждой упорядоченной паре (x, y) из некоторого множества M по определенному правилу ставится в соответствие определенное число z принадлежащее множеству N, то говорят, что задана *функция двух переменных* $z = f(x, y)$.

При этом множество M называется *областью определения*, а N - *множеством значений функции*. Переменные x и y меняются независимо друг от друга.

Если независимых переменных $x_1,\ x_2, \dots, x_n$ n штук, имеем функцию n переменных

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Графиком функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек трехмерного пространства $(x,\ y,\ z)$, аппликата z которых связана с абсциссой x и ординатой y функциональным соотношением $z = f(x, y)$.

График функции двух переменных $z = f(x, y)$, вообще говоря, представляет собой некоторую поверхность в трехмерном пространстве. Как правило, построение поверхности оказывается довольно трудной задачей и поверхность в пространстве обладает гораздо меньшей наглядностью, чем линия на плоскости. Поэтому в случае двух переменных для изучения поведения функции используют линии уровня.

Линией уровня функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек на плоскости Оxy, в которых функция сохраняет одно и тоже значение C.

Примерами линии уровня являются *изотермы* на картах синоптиков – линии уровня температуры, *изобары* – линии уровня давления. В экономическом анализе также используются линии уровня.

Любой функции $z = f(x, y)$ можно поставить в соответствие пару функций одной переменной: при фиксированном значении $x = x_0$ функцию $Z = f(x_0, y)$ переменной y; при фиксированном значении $y = y_0$ функцию $Z = f(x, y_0)$ по переменной x.

Пусть $z = f(x, y)$ – функция двух переменных. Первая производная функции $z = f(x, y)$ по переменной x при фиксированной второй переменной y называется *первой частной производной функции по переменной* x, что символически записывается так: z'_x, или $f'_x(x, y)$, или $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Аналогично определяется *первая частная производная функции* $f(x, y)$ *по переменной* y: z'_y, или $f'_y(x, y)$, или $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Из определения частных производных следует, что для нахождения частной производной $f'_x(x, y)$ надо считать постоянной переменную y, а для нахождения $f'_y(x, y)$ – переменную x. Вычисления частных производных выполняется по обычным правилам дифференцирования функций одной переменной, при этом значении всех переменных, кроме одной, по которой вычисляется производная, считаются постоянными.

Пример 6.1. Найти частные производные функции $z = x^3 - 3x^2y + 4y^3$.

Решение. При вычислении частной производной *по* x следует переменную y считать постоянной, поэтому слагаемое $4y^3$ играет роль постоянной и его производная равна нулю, а в слагаемом $3x^2y$ по свойству дифференцирования можно вынести постоянный множитель $3y$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6xy$$

Аналогично, вычисляя частную производную функции по y, считаем постоянной переменную x:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x^2 + 12y^2$$

Как видим из примера, частные производные сами являются функциями тех же переменных, от которых эти производные вычислялись. Как и в случае функции одной переменной, можно определить производные от производных, или производные высших порядков. Ограничимся частными производными второго порядка функции двух переменных.

Если частную производную z'_x продифференцировать по x, а частную производную z'_y продифференцировать по y, получим *частные производные второго порядка* «дважды» по x и «дважды» по y :

$$z''_{xx} = f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} f'_x(x,y),$$

$$z''_{yy} = f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} f'_y(x,y).$$

Если же частную производную z'_x продифференцировать по y, а частную производную z'_y продифференцировать по x, получим еще одну пару частных производных второго порядка, называемых *смешанными*:

$$z''_{xy} = f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f'_x(x,y),$$

$$z''_{yx} = f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f'_y(x,y).$$

Заметим, что написание нижних индексов соответствует порядку вычисления производных по различным переменным.

Пример 6.2. Найти частные производные второго порядка функции $z = (x^3y^2 + 8)^2$.

Решение. Найдем сначала частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x^3y^2+8)\cdot 3x^2y^2 = 6(x^5y^4+8x^2y^2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2(x^3y^2+8)\cdot 2x^3y = 4(x^6y^3+8x^3y).$$

Для частных производных второго порядка имеем:

$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}[6(x^5y^4+8x^2y^2)] = 6(x^5y^4+8x^2y^2)'_x = 6(5x^4y^4 + 16xy^2),$

$z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}[4(x^6y^3+8x^3y)] = 4(x^6y^3+8x^3y)'_y = 4(3x^6y^2+8x^3),$

$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}[6(x^5y^4+8x^2y^2)] = 6(x^5y^4+8x^2y^2)'_y =$$

$$= 6(4x^5y^3+16x^2y) = 24\,(x^5y^3+4x^2y),$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}[4(x^6y^3+8x^3y)] = 4(x^6y^3+8x^3y)'_x =$$

$$= 4(6x^5y^3+24x^2y) = 24\,(x^5y^3+4x^2y).$$

Легко заметить, что выполняется равенство

$$z''_{xy} = z''_{yx} = 24(x^5y^3+4x^2y).$$

Равенство частных производных второго порядка, отличающихся порядком дифференцирования выполняется для достаточно широкого класса функций, к которым относятся многие функции, встречающиеся в экономике и бизнесе. Поэтому в общем случае:

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y).$$

Для функции двух переменных $z = f(x,y)$, как и для функции одной переменной, можно ввести понятие дифференциала функции, который определяется выражением

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

где дифференциалы независимых переменных принимаются равными приращениям $dx = \Delta x,\ \ dy = \Delta y$.

Как и в случае функций одной переменой, дифференциал функции двух переменных приближено определяет величину изменения функции при малых изменениях независимых переменных:

$\Delta z \approx z'_x dx + zdy.$

Пример 6.3. Найти дифференциал функции $z = (x^2 - 1)(y^3 + 2)$

Решение. Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x(y^3 + 2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2(x^2 - 1),$$

тогда дифференциал имеет вид

$$dz = 2x(y^3 + 2)dx + 3y^2(x^2 - 1)dy.$$

Упорядоченная пара частных производных первого порядка $\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ или $\left(f'_x(x, y), f'_y\,(x, y)\,\right)$ функции $y = f(x, y)$ двух переменных x и y обозначается $\boldsymbol{grad\ z}$ или $\boldsymbol{grad(x, y)}$ и называется *градиентом функции двух переменных* $y = f(x, y)$. Градиент функции двух переменных является двумерным вектором и в каждой точке (x_0, y_0) показывает направление самого быстрого роста функции $f(x, y)$.

Пример 6.4. Найти градиент функции $z = (x^2 - 1)(y^3 + 2)$ в точке $N = (2; 1)$.

Решение. Частные производные: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x(y^3 + 2)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2(x^2 - 1)$.

Градиент в общем виде имеет вид:

$$\boldsymbol{grad\ z} = \left(2x(y^3 + 2);\ \ 3y^2(x^2 - 1)\right).$$

Чтобы найти градиент в точке $A(2,1)$ вычислим значения частичных производных в этой точке:

$\frac{\partial z}{\partial x}|_A = 2 \cdot 2(1 + 2) = 12,$

$\frac{\partial z}{\partial y}|_A = 3(4 - 1) = 9,$

тогда $\boldsymbol{grad\ z}|_{\boldsymbol{A}} = (12,9).$

Экстремум функции нескольких переменных

Как и в случае одной переменной, для функции $z = f(x, y)$ определяются *точки экстремума* (точки максимума и минимума).

Точка $M_0(x_0,\ y_0)$ называется *точкой максимума (минимума)* функции $z = f(x, y)$, если существует окрестность точки M_0, такая, что для всех точек (x, y) из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad \big(f(x_0, y_0) \leq f(x, y)\big)$$

Следует обратить внимание на *локальный* характер экстремума (максимума и минимума) функции, так как речь идет о максимальном и минимальном значении лишь в достаточно малой окрестности точки $M_0(x_0,\ y_0)$.

Стационарные точки, то есть точки из области определения, в которых может быть экстремум функции, определяются *необходимым условием* экстремума: если *точка* $M_0(x_0,\ y_0)$ *есть точка экстремума дифференцируемой функции* $z = f(x, y)$, *тогда частные производные первого порядка в этой точке равны нулю*.

Из необходимого условия следует, что в точке экстремума дифференцируемой функции градиент равен нулю (нулевой вектор).

Будет ли стационарная точка, точкой экстремума проверяется на основании *достаточного условия экстремума функции двух переменных*: *пусть функция* $z = f(x, y)$ *определена в некоторой окрестности стационарной точки* $M_0(x_0,\ y_0)$, *в которой* $f'_x(x_0, y_0) = 0$ *и* $f'_y(x_0, y_0)$*=0; имеет в этой точке непрерывные частные производные второго порядка* $f''_{xx}(x_0, y_0) = A$, $f''_{xy}(x_0, y_0) = B$, $f''_{yy}(x_0, y_0) = C$. *Тогда, если* $\Delta = AC - B^2 > 0$, *то в точке* $M_0(x_0,\ y_0)$ *функция* $z = f(x, y)$ *имеет экстремум, причем если* $A < 0$ *–максимум, если* $A > 0$ *– минимум. В случае* $\Delta = AC - B^2 < 0$, *экстремума в точке* $M_0(x_0,\ y_0)$ *нет. Если* $\Delta = AC - B^2 = 0$, *то вопрос о наличии экстремума в точке остается открытым*.

Исследование функции двух переменных на экстремум рекомендуется:

1. Найти частные производные функции первого порядка z'_x и z'_y.
2. Составить систему уравнений $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$, решить ее и найти, таким образом, стационарные точки.
3. Найти частные производные второго порядка, вычислить их значение в каждой стационарной точке и с помощью достаточного условия сделать вывод о наличии экстремумов.
4. Найти экстремумы (экстремальные значения) функции.

Пример 6.5. Найти экстремумы функции $z = x^2 + xy + 2y^2 - x + y$.

Решение.

1. Найдем частные производные первого порядка

$$z'_x = 2x + y - 1$$

$$z'_y = x + 4y + 1$$

2. Найдем стационарные точки из системы уравнений: $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + 4y + 1 = 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} y = 1 - 2x \\ -7x + 5 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = \frac{5}{7} \\ x = -\frac{3}{7} \end{cases}$, точка $M_0\left(\frac{5}{7}, -\frac{3}{7}\right)$ стационарная.

3. Находим частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = (2x + y - 1)'_x = 2,$$

$$z''_{yy} = (x + 4y + 1)'_y = 4,$$

$$z''_{xy} = (2x + y - 1)'_y = 1.$$

вычислим их значение в стационарной точке и найдем $A = 2,\ B = 1,\ C = 4$. Составим $\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 4 - 1 = 7 > 0$. На основании достаточного условия видим, что точка $M_0\left(\frac{5}{7};\ -\frac{3}{7}\right)$ является точкой минимума ($\Delta > 0,\ A = 2 > 0$).

4. Находим $z_{min} = z\left(\frac{5}{7};\ -\frac{3}{7}\right) = -\frac{4}{7}$.

Задачи с экономическим содержанием

Пример 6.6.

Небольшая фирма производит два вида товаров T_1 и T_2 и продает их по цене 100 и 80 ден. ед. соответственно. Известна функция C затрат (издержек) от объемов производства (выпуска) Q_1 и Q_2 соответственно товаров T_1 и T_2, которая имеет вид: $C = 3Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2$. Требуется определить такие объемы выпуска товаров Q_1 и Q_2 усл. ед., при которых прибыль Π получаемая фирмой, будет максимальной.

Решение:

Прибыль фирмы Π есть разница между доходом R и затратами C. Суммарный доход R от продажи товаров T_1 и T_2, учитывая их цену составит: $R = 100Q_1 + 80Q_2$.

Тогда $\Pi = R - C = 100Q_1 + 80Q_2 - (3Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2)$ или

$\Pi(Q_1, Q_2) = 100Q_1 + 80Q_2 - 3Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - Q_2^2$ – функция двух переменных, максимум которой необходимо найти.

Для определения стационарных точек этой функции найдем частные производные первого порядка.

$$\Pi'_{Q1} = 100 - 6Q_1 - 2Q_2, \quad \Pi'_{Q2} = 80 - 2Q_1 - 2Q_2$$

Приравняем их к нулю и запишем систему:

$$\begin{cases} 100 - 6Q_1 - 2Q_2 = 0 \\ 80 - 2Q_1 - 2Q_2 = 0 \end{cases}.$$

Решение этой системы Q_1=5 и Q_2=35, следовательно, стационарная точка M_0 имеет координаты $M_0(5,\ 35)$.

Выясним, имеется ли в этой точке экстремум. Для этого найдем частные производные второго порядка.

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_1^2} = -6, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_2^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_1 \partial Q_2} = -2.$$

Частные производные второго порядка являются константами, поэтому их значения стационарной точке равны:

$$\left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_1^2}\right|_{M_0} = -6, \qquad \left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_2^2}\right|_{M_0} = -2, \qquad \left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_1 \partial Q_2}\right|_{M_0} = -2.$$

Итак, $A = -6, \quad B = -2, \quad C = -2$.

Определим $\Delta = AC - B^2 = 12 - 4 = 8 > 0$. На основании достаточного условия делаем вывод о том, что точка $M_0(5;\,35)$ является точкой экстремума, причем максимума, т.к. $A = -6 < 0$.

Находим максимальное значение функции

$$\Pi_{maa} = \Pi\Big|_{M_0} = 100 \cdot 5 + 80 \cdot 35 - 3 \cdot 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 35 - 35^2 = 1650 \text{ (ден. ед.)}.$$

Это и есть величина максимальной прибыли, которая достигается при объемах производства Q_1=5 и Q_2=35усл. ед.

Тема 7. Неопределенный интеграл

Основной задачей дифференциального исчисления является нахождение по данной функции ее производной. Рассмотрим обратную задачу: дана функция, требуется найти такую функцию, производная которой была бы равна данной.

Функция $F(x)$ называется *первообразной функции* $f(x)$ на отрезке $[a;\,b]$, если во всех точках этого отрезка выполняется равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Пример 7.1. Функция $F(x) = \sin x$ первообразная для функции $f(x) = \cos x$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$, так как в каждой точке этого интервала выполнено равенство $(\sin x)' = \cos x$.

Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то выражение $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом для функции $f(x)$, и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\int f(x)\cdot dx = f(x)\cdot dx.$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого C:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx, \text{ где } k\neq 0.$$

5. Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их интегралов:

$$\int (f(x)\pm g(x))\cdot dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, ($n\neq -1$).

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

5. $\int e^x dx = e^x + C$.

11. $\int tg\, x\, dx = -\ln|\cos x| + C$.

12. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C \;\; (a\neq 0)$.

13. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \;\; (a\neq 0)$.

14. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \;\; (a\neq 0)$.

6. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$.

7. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.

16. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$.

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C$.

17. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right| + C$.

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C$.

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

10. $\int ctg\,x\,dx = \ln|\sin x| + C$.

Основные методы интегрирования

1. *Непосредственное интегрирование*

Интегрирование, которое можно произвести с помощью табличных интегралов (после преобразования подынтегральной функции, если это необходимо), будем называть *непосредственным интегрированием*.

Пример 7.2. Найти: а) $\int \frac{1+5x^2}{x^2\cdot\left(1+x^2\right)}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^4+x^2}dx$.

Решение.

$$\text{а)}\int \frac{1+5x^2}{x^2\cdot\left(1+x^2\right)}dx = \int \frac{\left(1+x^2\right)+4x^2}{x^2\cdot\left(1+x^2\right)}dx = \int \frac{1+x^2}{x^2\cdot\left(1+x^2\right)}dx + \int \frac{4x^2}{x^2\cdot\left(1+x^2\right)}dx =$$

$$= \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{4}{1+x^2}dx = \int x^{-2}dx + 4\cdot\int \frac{1}{1+x^2}dx = -\frac{1}{x} + 4arctgx + C.$$

б) прибавляя и вычитая x^2 в числителе подынтегральной функции, получаем

$$\int \frac{dx}{x^4+x^2} = \int \frac{x^2+1-x^2}{x^2\cdot\left(1+x^2\right)}dx = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2+1} = \int x^{-2}dx - \int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{x} - arctgx + C.$$

2. Метод подстановки (замены переменной)

Метод замены переменной в неопределенном интеграле является одним из самых эффективных методов интегрирования.

Пусть требуется найти интеграл $\int f(x)\,dx$, который не является табличным. В этом случае в подынтегральном выражении нужно произвести замену переменной *x* = φ*(t)*, чтобы интеграл стал табличным или сводился к ним проще, чем первоначальный. Функция φ*(t)* должна быть непрерывной, иметь непрерывную производную и обратную функцию. Так как *dx* = φ´*(t)dt*, то

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

Замечание. При интегрировании функций иногда целесообразно сделать замену *t* = ψ*(x)*, а не *x*=φ*(t)*. Тогда *dt* = ψ´*(x) dx*.

Не существует общего «рецепта», следуя которому можно всегда понять, какую подстановку надо применить к данному интегралу, однако следует иметь ввиду полезные подсказки:

1) если под знаком интеграла стоит сложная функция *f*(φ(*x*)), как правило, используется подстановка *t* = φ*(t)* (к примеру, если в подынтегральном выражении встречается функция e^{x^2}, то стоит попробовать подстановку $t = x^2$, а если $\sin\frac{1}{x}$, то $t = \frac{1}{x}$ и т. д.);

2) если в подынтегральном выражении есть готовый дифференциал функции φ*(t)*, т. е. выражение φ´(*x*)*dx*, то имеет смысл попробовать подстановку *t* = φ*(t)*.

Умение найти подходящую подстановку приходит по мере накопления опыта интегрирования. Рассмотрим ряд примеров.

Пример 7.3. Найти: а) $\int x^2\cdot\sqrt[3]{3x^3+5}\,dx$; б) $\int e^x\cdot\cos\left(2e^x+5\right)dx$;

в) $\int\frac{2^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$; г) $\int\frac{2^x\,dx}{\sqrt{4-4^x}}$.

Решение. а) $\int x^2 \cdot \sqrt[3]{3x^3+5}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = 3x^3+5 \\ dt = 9x^2dx \\ \frac{1}{9}dt = x^2dx \end{array} \right| = \frac{1}{9}\int t^{\frac{1}{3}}\,dt =$

$$= \frac{1}{12}\left(3x^3+5\right)^{\frac{4}{3}} + C = \frac{1}{12}\left(3x^3+5\right)\cdot\sqrt[3]{3x^3+5} + C.$$

б) $\int e^x \cdot \cos\left(2e^x+5\right)dx = \left| \begin{array}{l} t = 2e^x+5 \\ dt = 2e^x dx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \cos t\,dt = \frac{1}{2}\sin t + C =$

$$= \frac{1}{2}\sin\left(2e^x+5\right) + C.$$

в) $\int \frac{2^{\frac{1}{x}}dx}{x^2} = \left| \begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \\ dt = -\frac{dx}{x^2} \end{array} \right| = -\int 2^t\,dt = -\frac{2^t}{\ln 2} + C = -\frac{2^{\frac{1}{x}}}{\ln 2} + C.$

г) $\int \frac{2^x\,dx}{\sqrt{4-4^x}} = \int \frac{2^x\,dx}{\sqrt{4-\left(2^x\right)^2}} = \left| \begin{array}{l} t = 2^x \\ dt = 2^x \ln 2dx \end{array} \right| = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{dt}{\sqrt{2^2-t^2}} =$

$$= \frac{1}{\ln 2}\arcsin 2^{x-1} + C.$$

Интегрирование по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции от x. Тогда дифференциал их произведения равен

$$d(u \cdot v) = udv + vdu.$$

Проинтегрировав это выражение, получим $\int d(u \cdot v) = \int udv + \int vdu$ или

$\int udv = u \cdot v - \int vdu.$

Формула $$\int udv = u \cdot v - \int vdu$$

выражает правило *интегрирования по частям.*

Пример 7.4. Найти:

а) $\int (x+1)\cdot\cos 2xdx$; в) $\int \sin\sqrt[3]{x}\,dx$;

б) $\int (x-2)\cdot e^{3x}dx$; г) $\int e^x \cos x dx$.

Решение. Применим метод интегрирования по частям.

а) $$\int (x+1)\cdot \cos 2x dx = \left| \begin{matrix} u = x+1, & dv = \cos 2x dx, \\ du = dx, & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{matrix} \right| =$$

$$= (x+1)\cdot \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = \frac{x+1}{2}\cdot \sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

б) $$\int (x-2)\cdot e^{3x}dx = \left| \begin{matrix} u = x-2, & dv = e^{3x}dx, \\ du = dx, & v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{matrix} \right| =$$

$$= (x-2)\cdot \frac{1}{3}\cdot e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}(x-2)e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C.$$

в) Целесообразно ввести новую переменную $t = \sqrt[3]{x}$.

$$\int \sin \sqrt[3]{x}\, dx \left| \begin{matrix} t = \sqrt[3]{x} \\ x = t^3 \\ dx = 3t^2 \end{matrix} \right| = \int 3t^2 \cdot \sin t\, dt = 3\int t^2 \cdot \sin t\, dt = \left| \begin{matrix} u = t^2, & dv = \sin t dt, \\ du = 2t dt, & v = -\cos t, \end{matrix} \right| =$$

$$= 3\cdot \left(-t^2 \cdot \cos t + 2\int t \cos t dt\right) = -3t^2 \cdot \cos t + 6\int t \cos t dt = \left| \begin{matrix} u = t, & dv = \cos t dt, \\ du = dt, & v = \sin t, \end{matrix} \right| =$$

$$= -3t^2 \cdot \cos t + 6\cdot \left(t \sin t - \int \sin t dt\right) = -3t^2 \cdot \cos t + 6t \sin t + 6\cos t + C =$$

$$= -3\sqrt[3]{x^2} \cdot \cos\sqrt[3]{x} + 6\cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sin\sqrt[3]{x} + 6\cos\sqrt[3]{x} + C.$$

г) Обозначим $I = \int e^x \cos x dx$.

$$\int e^x \cos x dx = \left| \begin{matrix} u = e^x, & dv = \cos x\, dx, \\ du = e^x dx, & v = \sin x \end{matrix} \right| = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \sin x dx.$$

Последний интеграл берем также по частям

$$\int e^x \sin x dx = \left| \begin{matrix} u = e^x, & dv = \sin x\, dx, \\ du = e^x dx, & v = -\cos x \end{matrix} \right| = -e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \cos x dx.$$

В результате получаем уравнение вида: $I = e^x \cdot \sin x - \left(-e^x \cdot \cos x + I\right)$.

Решая его, окончательно будем иметь

$$I = \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x \cdot (\sin x + \cos x) + C.$$

Тема 8. Определенный интеграл

Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a,b]$ и $a = x_0 < x_1 < \cdots x_n = b$ – произвольное разбиение этого отрезка на n элементарных промежутков. Предположим, что на каждом отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ выбрана точка ξ_i. Тогда сумма

$$S = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

называется *интегральной суммой* для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$, а её предел при стремлении $\max_i \Delta x_i$ к нулю, если он существует и конечен, называется *определённым интегралом* от функции $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается так:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{max\Delta x_{i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Определённый интеграл не должен зависеть от разбиений и выбора точек ξ_i.

Если определённый интеграл существует, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a,b]$. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке и, если существует первообразная, то справедлива основная формула интегрального исчисления

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$ (*формула Ньютона-Лейбница*),

где $F(x)$ – какая-нибудь первообразная функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Некоторые свойства определенного интеграла

1. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx .$$

2. Определенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен сумме определенных интегралов от этих функций:

$$\int_a^b \left(f_1(x) + f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx\ .$$

3. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\ .$$

Совершенно ясно, что если верхний или нижний пределы интегрирования совпадают, то есть если $b = a$, *то интеграл будет равен нулю:*

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

4. Интеграл по отрезку равен сумме интегралов по его частям:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \text{ где } a < c < b.$$

Пример 8.1. Вычислить интегралы.

1. $\int_1^3 \frac{(x-1)^2}{x}dx.$

Решение:

$\int_1^3 \frac{(x-1)^2}{x}dx = \int_1^3 \frac{x^2-2x+1}{x}dx = \int_1^3 \left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)dx = \int_1^3 x\,dx - 2\int_1^3 dx + \int_1^3 \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\Big|_1^3 - 2x\Big|_1^3 + \ln x\Big|_1^3 = \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) - 2(3-1) + (\ln 3 - \ln 1) = 4 - 4 + \ln 3.$

2. $\int_0^2 \frac{8^x-4^x}{4^x}dx.$

Решение:

$\int_0^2 \frac{8^x-4^x}{4^x}dx = \int_0^2 \left(\frac{8^x}{4^x} - 1\right)dx = \int_0^2 (2^x - 1)\,dx = \int_0^2 2^x\,dx - \int_0^2 dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^2 - x\Big|_0^2 = \left(\frac{2^2}{\ln 2} - \frac{2^0}{\ln 2}\right) - (2-0) = \frac{4}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} - 2 = \frac{3}{\ln 2} - 2.$

Замена переменных (подстановки) в определенном интеграле

Пусть выполняются следующие условия:

1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$;

2) функция $x = \varphi(x)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(x)$ на отрезке $[a, b]$;

3) $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$;

4) функция $f\big(\varphi(t)\big)$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt.$$

Пример 8.2. Вычислить интегралы.

1. $\int_0^5 \frac{3dx}{\sqrt[4]{3x+1}}$.

Решение.

$$\int_0^5 \frac{3dx}{\sqrt[4]{3x+1}} = \left|\begin{array}{c} t = 3x+1 \\ x = 0, t = 1 \\ x = 5, t = 16 \\ dt = 3dx \\ dx = \frac{1}{3}dt \end{array}\right| = 3 \cdot \frac{1}{3}\int_1^{16} \frac{dt}{\sqrt[4]{t}} = \int_1^{16} t^{-\frac{1}{4}}dt = \frac{4}{3}t^{\frac{3}{4}}\Big|_1^{16} =$$

$$\frac{4}{3}\sqrt[4]{t}\Big|_1^{16} = \frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{16^3} - \sqrt[4]{1^3}\right) = \frac{4}{3}(8-1) = \frac{28}{3}.$$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin x + 4}}$.

Решение.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{\sin x + 4}} = \left|\begin{array}{c} t = \sin x + 4 \\ x = 0, t = 0 \\ x = \frac{\pi}{2}, t = 5 \\ dt = \cos x\, dx \end{array}\right| = \int\limits_4^5 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int\limits_4^5 t^{-\frac{1}{2}} = 2\,t^{\frac{1}{2}}\Big|_4^5 = 2\big(\sqrt{5} - \sqrt{4}\big)$$

$$=$$

$$= 2\big(\sqrt{5} - 2\big) = 2\sqrt{5} - 4.$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле

Если функции *u(x)*, *υ(x)* – дифференцируемые на отрезке $[a, b]$, то справедлива *формула интегрирования по частям*, которая имеет вид:

$$\int_a^b u(x)d\upsilon(x) = u(x)\upsilon(x)\Big|_a^b - \int_a^b \upsilon(x)du(x).$$