Пример 8.3. Вычислить интеграл.

$$\int_0^{\pi} x \ \sin 2x \, dx$$

Решение.

$$\int_0^{\pi} x \ \sin 2x \, dx = \left| \begin{array}{c} u = x \\ du = dx \\ dv = \sin 2x dx \\ v = \frac{-\cos 2x}{2} \end{array} \right| = -x \frac{\cos 2x}{2} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos 2x \, dx}{2} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}.$$

Несобственный интеграл

Несобственными интегралами называются: 1) интегралы с бесконечными пределами; 2) интегралы от неограниченных функций.

Если функция $f(x)$ непрерывна при $x \epsilon [a; +\infty)$, то несобственный интеграл определяется равенством

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Если этот предел существует и конечен, то интеграл называется *сходящимся*. В противном случае интеграл называется *расходящимся*.

Аналогично определяются интегралы:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x) dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 f(x) dx + \lim_{a \to +\infty} \int_0^b f(x) dx.$$

Пример 8.4. Вычислить интегралы или установить их расходимость:

1. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

Решение.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{-1}{x} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{-1}{b} + 1 \right) = 1.$$

2. $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Решение.

$\int_4^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty}\int_4^{b}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty} 2\sqrt{x}\Big|_4^b = \lim_{b\to+\infty} 2(\sqrt{b}-2) = \infty.$

Следовательно, интеграл расходится.

3. $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x}$.

Решение.

$\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\int_e^{b}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_e^b = \lim_{b\to+\infty}(\ln b - 1) = \infty.$

То есть интеграл расходиться.

Вычисление площади криволинейной фигуры

Пусть $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ – непрерывные на $[a, b]$ функции. Кроме того, $f_2(x) \geq f_1(x)$ при любом $x \in [a, b]$. Тогда площадь фигуры, ограниченной графиками функций $x = a$, $x = b$, $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, вычисляется по формуле $S = \int_a^b\big(f_2(x) - f_1(x)\big)dx$.

Пример 8.5. Вычислить площадь фигуры, ограниченную заданными линиями $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$.

Решение. Построим линии, они пересекаются в точках $(0, 0)$ и $(1, 1)$.

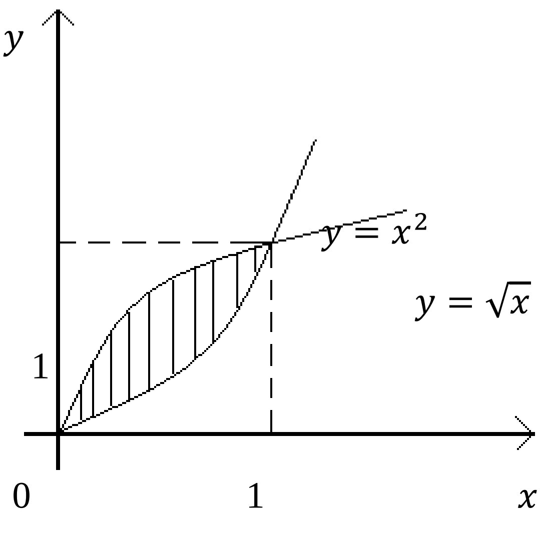

Рис. 8.1.

Тогда имеем $S = \int_0^1\big(\sqrt{x} - x^2\big)dx = \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

Пример 8.6. Найти площади плоских фигур, ограниченных линиями: $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 3$, $y = 0$.

Решение:

Искомая площадь $S = S_{OABC}$ - это площадь под «кривой» OAB (см. рис.8.2.) на отрезке $[0; 3]$.

Линия OAB состоит из части OA параболы $y = x^2$ и части AB гиперболы $y = 1/x$. Соответственно, площадь S найдем как сумму двух площадей: $S = S_{OAD} + S_{ABCD}$, каждую из которых вычислим, опираясь на геометрический смысл определенного интеграла. Решая систему

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 1/x, \end{cases}$$

находим координаты точки A: (1, 1).

Тогда $S_{OAD} = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$,

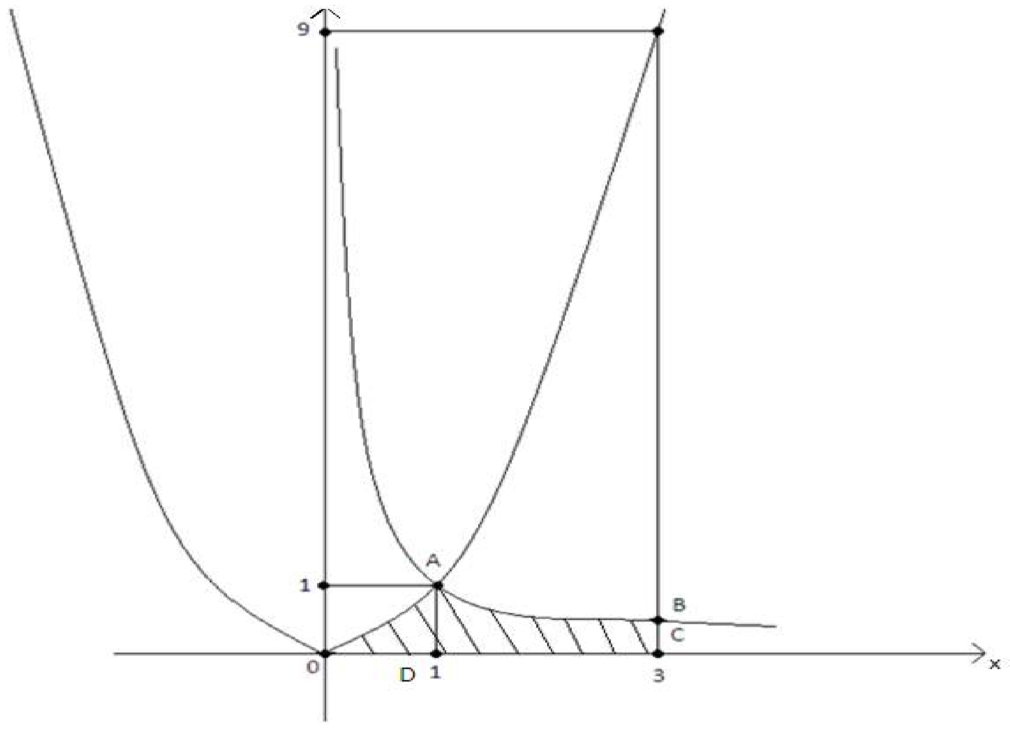

Рис. 8.2.

$S_{ABCD} = \int_1^3 \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^3 = \ln 3$ и $S = S_{OAD} + S_{ADCD} = \frac{1}{3} + \ln 3 \approx 1{,}43$ (ед.^{2}).

Тема 9. Непосредственный подсчет вероятностей

Изучение закономерностей однородных массовых случайных явлений составляет предмет ***теории вероятностей*** и основанной на ней ***математической статистики***.

Изучение каждого явления в порядке наблюдения или проведения опыта связано с осуществлением некоторого комплекса условий или действий, в результате которого происходит определенное явление, называемое ***событием***. События, которые могут произойти, а могут не произойти в результате испытания называют ***случайными***, и обозначают заглавными буквами A, B, C и т.д.

Событие называется ***достоверным***, если оно обязательно должно произойти в результате испытания и ***невозможным***, если в результате испытания не может произойти.

События называются ***несовместными***, если в условиях испытания каждый раз возможно появление только одного из них, т.е. появление одного из событий исключает появление другого. В противном случае случайные события называются ***совместными***.

События A и $\overline{A}$ (не A) называются ***противоположными***, если в условиях испытания они несовместны и являются единственными его исходами.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют ***полную группу***, если они являются единственно возможными и несовместными исходами некоторого испытания.

События называются ***равновозможными***, если они имеют одинаковые шансы появиться в результате испытания.

Простые или ***элементарные*** события - это неразложимые равновозможные события и их появление обусловлено только одним исходом испытания.

Если события могут появиться в результате нескольких исходов испытания, то их называют ***сложными***.

Те исходы, при которых наступает событие A, называются ***благоприятствующими*** событию A.

Суммой *событий* A и B называется событие $A+B$, которому благоприятствуют все элементарные события, благоприятствующие хотя бы одному из событий A и B. Другими словами событие $A+B$ заключается в наступлении события A или события B, или обоих вместе.

Произведением *событий* A и B называется событие $A\cdot B$, которому благоприятствуют события, благоприятствующие обоим событиям A и B. Другими словами, событие $A\cdot B$ заключается в совместном появлении обоих событий и A и B.

Для решения практических задач нужна количественная оценка (мера) возможности появления или непоявления событий. Для определения этой меры ввели понятие вероятности события $P(A)$.

Относительной частотой $W(A)$ события A называется отношение числа M появлений события A к общему числу N испытаний, т.е. $W(A)=\dfrac{M}{N}$. При больших N относительная частота обнаруживает свойство устойчивости, стабилизируется около некоторого числа, которое и принято считать ***статистической*** вероятностью события A, т.е. $P_{cm}(A)=\lim\limits_{N\to\infty} W(A)$. Ясно, что применение этого определения на практике затруднительно, т.к. требует большого числа испытаний, поэтому, если возможно, то используют ***классическое определение вероятности***:

$$P(A)=\frac{m}{n}, \tag{9.1}$$

где n – общее число равновозможных несовместных исходов испытания, а m – число исходов, благоприятствующих появлению события A**.**

Из этого определения вытекают следующие ***свойства***:

1^0. Вероятность любого события заключена в пределах от нуля до единицы, т.е $0\le P(A)\le 1$;

2^0. Вероятность достоверного события U равна единице: $P(U)=1$, поскольку оно обязательно происходит при испытании, следовательно, ему благоприятствуют все элементарные исходы, т.е. $m=n$;

3^0. Вероятность невозможного события V равна нулю: $P(V)=0$, т.к. оно не может произойти в результате испытания, т.е. ему не благоприятствует ни один из исходов и, следовательно $m=0$;

4^0. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т.е. $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Вероятность можно связать с процентами. Например, если известно, что $P(A)=$ 0,7, то при достаточно большом числе испытаний, событие A появится примерно в 70% случаев.

Если вероятность близка к единице, то событие является часто происходящим. Если вероятность близка к нулю, то событие является редким.

Следует заметить, что, вычисляя вероятность по формуле (9.1) события A, которое является сложным, необходимо для подсчета общего числа n – равновозможных и несовместных исходов испытания и m– числа исходов, благоприятствующих появлению события A применять понятие *числа* ***сочетаний*** из n элементов по m. Подробнее с этим понятием можно ознакомиться в разделе ***комбинаторика***, который рассматривает решение задач на подсчет всех возможных различных комбинаций, составленных из конечного числа элементов по определенным правилам.

Определение. Любое подмножество из m элементов множества, содержащего n элементов, называется ***сочетанием***.

Число всех различных сочетаний из n элементов по m обозначается C_n^m и находится по формуле:

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}, \tag{9.2}$$

где $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$, причем $0!=1$, для любого натурального n.

Из формулы (9.2) следует, что $C_n^1 = n$ и $C_n^{n-1} = n$.

В сочетаниях порядок выбора элементов не важен, т.е. сочетания, состоящие из одних и тех же элементов, но отобранных в разном порядке являются одинаковыми.

Пример 9.1

Данные о распределении работников складского мультимодального комплекса по должностям и полу приведены в таблице.

Должности	Женщины	Мужчины
Заведующий складом	2	1
Менеджера по складированию и дистрибуции	2	1
Кладовщик	2	1
Комплектовщик товара	12	9
Контролер-комплектовщик	5	5
Грузчик	-	6

1. Наудачу отобран один из работников. Найти вероятность того, что это:

а) мужчина (A_1);

б) контролер-комплектовщик (B_1);

в) женщина, комплектовщик товара (C_1).

2. На этом же предприятии решено создать группу из трех человек, ответственную за проведение мероприятия. Если людей отбирать случайным образом, то какова вероятность, что это будут:

а) все женщины (A_2);

б) две женщины и один мужчина (B_2);

в) одна женщина, работающая менеджером по складированию и дистрибуции, одна женщина комплектовщик товара и мужчина (C_2).

Решение:

1. События A_1, B_1 и C_1 – простые, т.к., появляются в результате одного исхода испытания, поэтому для подсчета вероятностей этих событий

по формуле (1.1) будем иметь:

а) здесь n=46 – общее число работников, а m=23 – число мужчин среди них, следовательно $P(A_1)=\frac{23}{46}=\frac{1}{2}=0{,}5$;

б) общее число работников n=46, а m=10 – число контролеров-комплектовщиков, следовательно $P(B_1)=\frac{10}{46}=0{,}22$;

в) n=46, а m=12 – число женщин комплектовщиков товара, поэтому $P(C_1)=\frac{12}{46}=0{,}26$.

2. События A_2, B_2 и C_2 – сложные, т.к., появляются в результате трех исходов испытания, поэтому общее число n равновозможных несовместных исходов испытания и m – число исходов, благоприятствующих появлению событий, будем находить по формуле числа сочетаний (9.2):

а) из числа всех работников, которое равно 46, составляются различные комбинации по три человека, число таких комбинаций и есть n в формуле (1.1), т.е. $n=C_{46}^3=\frac{46!}{3!\cdot 43!}=\frac{44\cdot 45\cdot 46}{1\cdot 2\cdot 3}=22\cdot 15\cdot 46$. Общее число женщин на предприятии равно 23, следовательно $m=C_{23}^3=\frac{23!}{3!\cdot 20!}=\frac{21\cdot 22\cdot 23}{1\cdot 2\cdot 3}=7\cdot 11\cdot 23$. Теперь по формуле (9.1) будем иметь:

$$P(A_2)=\frac{7\cdot 11\cdot 23}{22\cdot 15\cdot 46}=\frac{7}{2\cdot 15\cdot 2}=\frac{7}{60}=0{,}12;$$

б) двух женщин отбирают из 23, работающих на предприятии, и одного мужчину из числа всех мужчин, которых на данном предприятии также 23, следовательно $P(B_2)=\frac{C_{23}^2\cdot C_{23}^1}{C_{46}^3}$, поскольку $C_{23}^2=\frac{23!}{2!\cdot 21!}=\frac{22\cdot 23}{2}=11\cdot 23$, а $C_{23}^1=23$, окончательно получим

$$P(B_2)=\frac{11\cdot 23\cdot 23}{22\cdot 15\cdot 46}=\frac{23}{2\cdot 15\cdot 2}=\frac{23}{60}=0{,}38;$$

в) здесь $P(C_2)=\frac{C_2^1\cdot C_{12}^1\cdot C_{23}^1}{C_{46}^3}=\frac{2\cdot 12\cdot 23}{22\cdot 15\cdot 46}=\frac{2}{11\cdot 5}=\frac{2}{55}=0{,}04$.

Тема 10. Случайные величины

Переменная величина, принимающая в результате испытания то или иное (но при этом только одно) возможное значения в зависимости от случая, называется ***случайной величиной*** (СВ).

Различают ***дискретные*** (ДСВ) и ***непрерывные*** (НСВ) случайные величины.

Значения дискретной случайной величины изолированы друг от друга, в то время как непрерывная случайная величина принимает любые значения из некоторого интервала.

СВ обозначаются заглавными буквами X, Y, Z,… Значения случайных величин обозначают соответственно буквами x, y, z,…

Например, стрелок стреляет по мишени. Рассмотрим случайные величины:

X – число выбитых очков, и $У$ – отклонение от центра мишени.

Здесь X – ДСВ, принимающая одно из одиннадцати возможных значений: 0, 1, 2, 3, ..., 10.

$У$ – НСВ, принимающая значения в интервале $[0;+\infty)$.

Для задания СВ недостаточно перечислить все ее возможные значения или записать интервал возможных значений, необходимо также указать как часто эти значения встречаются.

Полную информацию о ДСВ дает ее ***закон распределения***. Для ДСВ, чаще всего, используют таблицу, где в верхней строке записывают в возрастающем порядке все возможные значения СВ, а в нижней строке – вероятности, с которыми эти значения встречаются:

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	…	p_n

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – значения случайной величины X, причем $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$; $p_i = P(X = x_i)$, т.е. p_i – вероятность того, что случайная величина X приняла значение x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Закон распределения дискретной случайной величины иначе называют ***рядом распределения***.

Если закон распределения дискретной случайной величины составлен правильно, то должно выполняться равенство: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

Для задания НСВ чаще всего применяют функцию плотности распределения $f(x)$, которая обладает следующими свойствами:

1°. $f(x) \geq 0$, т.е. кривая функции плотности расположена либо выше оси абсцисс, либо на ней.

2°. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, геометрически это означает, что площадь, ограниченная кривой плотности распределения $f(x)$ и осью абсцисс равна единице.

3°. Вероятность того, что значение НСВ заключено в интервале $[a; b]$, равна определенному интегралу от функции плотности на этом интервале, т.е. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Закон распределения содержит полную информацию о случайной величине, однако для практического использования эта полная информация часто не обязательна, достаточно знать некоторые ***числовые характеристики***, отражающие основные свойства распределения данной случайной величины.

К основным числовым характеристикам случайной величины X относятся *математическое ожидание $M(X)$*, *дисперсия $D(X)$* и *среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$*.

Математическое ожидание *$M(X)$* определяется формулой:

для ДСВ – $M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n$, (10.1)

для НСВ – $M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$. (10.2)

Математическое ожидание характеризует центр распределения, около которого сосредоточены все возможные значения СВ, т.е. определяет среднее значение.

Дисперсией *D(X)* называется математическое ожидание квадратов отклонений случайной величины от ее математического ожидания, т.е.:

$$D(X)=M\left((X-M(X))^2\right). \quad (10.3)$$

Если преобразовать правую часть формулы (10.3), используя свойства математического ожидания, то получим следующую формулу:

$$D(X)=M(X^2)-\left(M(X)\right)^2, \quad (10.4)$$

которую удобнее использовать при вычислении дисперсии. Здесь X^2 – случайная величина, значения которой равны квадратам значений самой случайной величины *X*, а соответствующие вероятности – те же самые.

Итак, для определения дисперсии можно использовать следующие формулы:

для ДСВ $D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i - M(X))^2 \cdot p_i$ (10.5)

или $D(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \left(M(X)\right)^2$ (10.6)

для НСВ $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-M(X)\right)^2 \cdot f(x)dx$ (10.7)

или $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - \left(M(X)\right)^2$. (10.8)

Дисперсия вычисляет среднее значение квадратов отклонений $\left(X-M(X)\right)$, т.е. характеризует разброс значений случайной величины вокруг ее среднего значения, но измеряется в квадратных единицах измерения СВ. Использование квадратов в определении дисперсии является вынужденной мерой, т.к. если убрать символ квадрата, то при достаточно больших отклонениях положительные и отрицательные по знаку отклонения аннулируются и среднее отклонение окажется равным нулю. Чтобы компенсировать эту вынужденную меру, вводят среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, которое определяется по формуле:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \qquad (10.9)$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, как и дисперсия $D(X)$, характеризует разброс значений случайной величины вокруг ее среднего значения, но измеряется в тех же единицах, в каких измеряется изучаемая случайная величина.

Пример 10.1

Дискретная случайная величина задана законом распределения. Найти числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Указать их смысловое значение.

X	2	4	5	6
p_i	0,3	0,1	0,2	0,4

Решение:

Проверим, что закон распределения задан правильно:

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}1 = 1.$$

Найдем числовые характеристики.

Математическое ожидание вычислим по формуле (10.1):

$$M(X) = 2 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}4 = 4{,}4.$$

Используя формулу (3.6), определим дисперсию $D(X)$:

$$D(X) = 2^2 \cdot 0{,}3 + 4^2 \cdot 0{,}1 + 5^2 \cdot 0{,}2 + 6^2 \cdot 0{,}4 - (4{,}4)^2 =$$
$$= 1{,}2 + 1{,}6 + 5 + 14{,}4 - 19{,}36 = 22{,}2 - 19{,}36 = 2{,}84.$$

Среднее квадратическое отклонение по формуле (10.9) равно:

$\sigma(X) = \sqrt{2,84} \approx 1,685$.

Итак, среднее значение ДСВ, определяемое $M(X) = 4,4$. Разброс значений вокруг ее математического ожидания характеризуется $D(X) = 2,84$ и $\sigma(X) = 1,685$.

Для определения числовых характеристик НСВ в формулах (10.2), (10.7), (10.8) используется функция плотности распределения $f(x)$, которая задает закон распределения НСВ. Эти законы могут быть весьма разнообразными, но на практике в большинстве случаев встречаются законы определенных типов. Важнейшим из них является *нормальный закон распределения*, которому подчиняется большинство НСВ.

Тема 11. Нормальное распределение

Нормальный закон распределения случайной величины является самым распространенным видом распределения непрерывных случайных величин. Нормальному закону подчинены случайные ошибки всевозможных измерений, с ним приходится сталкиваться при анализе и прогнозировании различных явлений в технике, экономике, социологии и других областях знаний.

Говорят, что случайная величина *X* распределена ***нормально***, если ее функция плотности распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (11.1)$$

где a и σ – параметры распределения, а именно: $a=M(X)$ – математическое ожидание, или среднее значение, случайной величины *X*; $\sigma^2 = D(X)$ – её дисперсия; $\sigma = \sigma(X)$ – среднее квадратическое отклонение.

График функции (11.1) называется *нормальной кривой* и имеет колоколообразный, симметричный относительно прямой $x = a$ вид, представлен на рисунке 11.1.

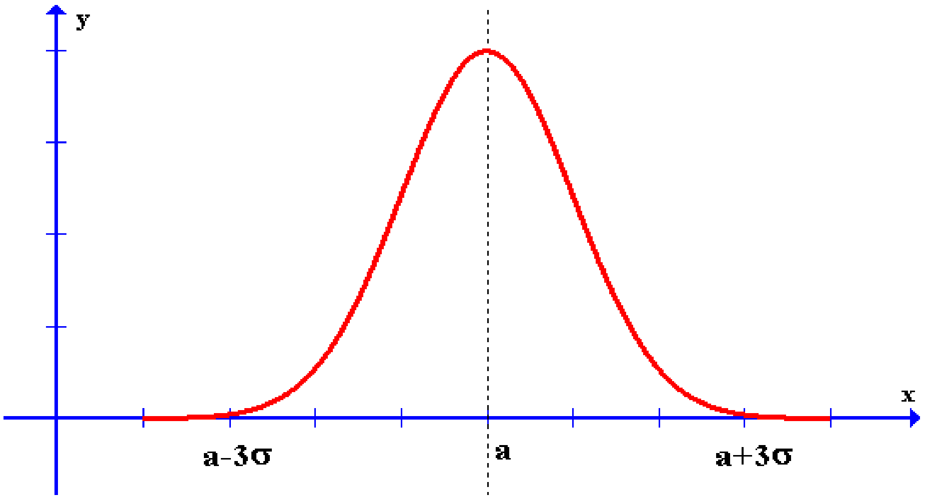

Рисунок 11.1

Как и для функции плотности любого вида, имеет место равенство: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, т.е. площадь, ограниченная нормальной кривой и осью абсцисс равна единице.

Если $a = 0$ а $\sigma = 1$, то функция (11.1) примет вид:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{11.2}$$

Эта функция называется ***функцией Гаусса***. Для определения значений функции $\varphi(x)$ составлении таблица для неотрицательных значений аргумента $x \in [0;\ 4)$, которая приведена в приложении 1. При $x \geq 4$ значения функции принимают равными нулю, т.е. $\varphi(x)$=0 при любом $x \geq 4$. Для отрицательных значений аргумента x используют свойство четности: $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в интервал $(\alpha\,;\beta)$ вычисляется по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \tag{11.3}$$

где $\varPhi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ – функция Лапласа.

Замечание. Поскольку вероятность отдельно взятого значения для НСВ равна нулю, то формула (4.3) может быть записана:

$$P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \le X < \beta) = P(\alpha < X \le \beta) = P(\alpha \le X \le \beta) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \qquad (11.4)$$

Таблица значений функции $\Phi(x)$ для неотрицательных значений аргумента $x \in [0; 5]$ приведена в приложении 1. При $x > 5$ значения функции принимают равными 0,5, т.е. $\Phi(x)$=0,5 при любом $x > 5$. Для отрицательных значений аргумента x используют свойство нечетности функции Лапласа: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Вычислим вероятность того, что нормально распределенная СВ отклонится от своего математического ожидания не более чем на 3σ.

$$P(\alpha - 3\sigma < X < \alpha + 3\sigma) = \Phi\left(\frac{\alpha + 3\sigma - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - 3\sigma - a}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-3\sigma}{\sigma}\right) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973.$$

Здесь значение $\Phi(3)$=0,49865 найдено по таблице приложения 1. Поскольку эта вероятность близка к единице, то в статистике принято считать достоверным такое событие. Таким образом, имеет место так называемое *правило «трех сигм»*: отклонение СВ X от ее математического ожидания практически не превышает 3σ, т.е. практически достоверно, что все значения СВ, распределенной по нормальному закону, принадлежат интервалу $(a - 3\sigma;\ a + 3\sigma)$.

Пример 11.1

Функция плотности распределения вероятностей случайной величины X имеет вид: $f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-10)^2}{50}}$. Найти математическое ожидание $M(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, дисперсию $D(X)$ случайной величины X и вероятность ее попадания в интервал (4; 15).

Решение:

Поскольку функция плотности задана, то сравнивая ее с общим видом (4.1) нормального закона распределения вероятностей, ясно, что параметрами этого закона являются: a = 10 и σ = 5, следовательно, $M(X) = a = 10$ – математическое ожидание; $\sigma(X) = \sigma = 5$ – среднее квадратическое отклонение; $D(X) = \sigma^2 = 25$ – дисперсия случайной величины X.

Чтобы найти вероятность попадания случайной величины в интервал (4;15), воспользуемся формулой (4.3) при a = 10, σ = 5, α = 4, β= 15. Получим:

$$P(4 < X < 15) = \Phi\left(\frac{15-10}{5}\right) - \Phi\left(\frac{4-10}{5}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1{,}2),$$

где $\Phi(1)$ = 0,3413; $\Phi(-1{,}2) = -\Phi(1{,}2) = -0{,}3849$ (см. приложение 1).

Окончательно получим:

$P(4 < X < 15)$ = 0,3413 – (– 0,3849)= 0,7262 ≈ 0,73.

Пример 11.2

Прогнозированием величины банковской процентной ставки занимается большая группа аналитиков. Средний результат таких индивидуальных прогнозов представляет собой общий согласованный прогноз. Известно, что этот прогноз относительно величины банковской процентной ставки в текущем году подчиняется нормальному закону с математическим ожиданием $M(X)$=10,3 (%) и стандартным отклонением $\sigma(X)$=2,7 (%).

1. Из группы аналитиков случайным образом был отобран один человек. Найдите вероятность того, что согласно прогнозу этого аналитика уровень процентной ставки:

а) превысит 11,4%;

б) окажется менее 13%;

в) будет в пределах от 10 до 14%.

2. Определить количество аналитиков из 9 опрошенных, которые спрогнозируют процентную ставку в пределах от 10 до 14 %.

Решение:

По условию СВ X – величина банковской процентной ставки имеет нормальное распределение с параметрами $a = 10{,}3$ и σ=2,7.

1. вероятность того, что у случайно выбранного аналитика величина прогнозируемой процентной ставки:

а) превысит 11,4%, можно рассматривать как вероятность того, что значение, которое определит этот аналитик, будет заключено в интервале от 11,4 до $+\infty$. Используя формулу (4.3), получим:

$$P(X > 11{,}4) = P(11{,}4 < X < +\infty) = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{11{,}4 - 10{,}3}{2{,}7}\right) =$$

$= \Phi(+\infty) - \Phi(0{,}41) =$ 0,5–0,1591=0,3409,

поскольку $\Phi(+\infty) = 0{,}5$.

Замечание. Здесь, учитывая правило трех сигм, можно было $+\infty$ заменить на величину $a + 3\sigma$ =10,3+3$\cdot$2,7=18,4, и найти по формуле (4.4)

$$P(X > 11{,}4) = P(11{,}4 < X \le 18{,}4) = \Phi\left(\frac{18{,}4 - 10{,}3}{2{,}7}\right) - \Phi\left(\frac{11{,}4 - 10{,}3}{2{,}7}\right) =$$

$= \Phi(3) - \Phi(0{,}41) =$ 0,4987–0,1591=0,3396.

Видно, что найденные значения вероятностей отличаются незначительно.

б) вероятность того, что у случайно выбранного аналитика прогноз будет менее 13% - это, то же самое, что вероятность того, что значение прогнозируемой банковской процентной ставки окажется в интервале от 0 до 13. Следовательно, по формуле (4.3), будем иметь:

$$P(X < 13) = P(0 < X < 13) = \Phi\left(\frac{13 - 10{,}3}{2{,}7}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 10{,}3}{2{,}7}\right) =$$

$= \Phi(1) - \Phi(-3{,}81) =$ 0,3413–(–0,4999)=0,3413+0,4999=0,8412.

в) вероятность того, что уровень процентной ставки будет в пределах от 10 до 14% найдем по формуле (11.4):

$$P(10 \le X \le 14) = \Phi\left(\frac{14-10{,}3}{2{,}7}\right) - \Phi\left(\frac{10-10{,}3}{2{,}7}\right) = \Phi(1{,}37) - \Phi(-0{,}11) =$$

=0,4147+0,0438=0,4585.

2. для определения количество аналитиков из 9 опрошенных, которые спрогнозируют процентную ставку в пределах от 10 до 14 у.е. необходимо знать вероятность того, что процентная ставка будет в заданных пределах. Эта вероятность найдена в предыдущем пункте 1. в), которую можно трактовать следующим образом: 45,85% всех аналитиков прогнозируют уровень процентной ставки в пределах от 10 до 14% . Следовательно, из 9 человек этот процент составит: $0{,}4585 \cdot 9 = 4{,}1 \approx 4$ (человека).

Тема 12. Понятие о генеральной и выборочной совокупностях. Статистические оценки параметров распределения

Математическая статистика – это раздел математики, изучающий методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений с целью выявления существующих закономерностей. Установление этих закономерностей основано на изучении статистических данных. Для получения статистических данных проводят обследования или наблюдения за различными совокупностями однотипных объектов. Это могут быть, например, предприятия, люди, изделия и т.п. При этом каждый объект характеризуется некоторыми числами - величинами изучаемых признаков. Экономически невыгодно, а часто и практически невозможно, производить обследования всей совокупности, если по результатам наблюдений сравнительно небольшой ее части можно получить, с достаточной для практических целей достоверностью, необходимую информацию о всей совокупности. Такой метод исследования носит название ***выборочного***. Вся подлежащая изучению совокупность однотипных объектов называется ***генеральной совокупностью*** (г.с.). Та часть объектов из г.с., которая попала на проверку, исследование или изучение называется ***выборкой***. Число элементов в г.с. и в выборке называется их объемами.

Получив случайную выборку, и изучив ее, мы должны сделать выводы о числовых параметрах распределения г.с. или определить закон распределения, т.е. его параметры. Найти точные значения указанных параметров нет возможности, следовательно, необходимо найти подходящие статистические оценки этих величин, т.е. такие выборочные характеристики, которые бы позволили получить по возможности более точные их значения. Для этого необходимо по имеющейся выборке провести первичную обработку собранных статистических данных. Значения, которые принял в результате исследования или наблюдения интересующий нас признак называют ***вариантами***. Первичную обработку статистических данных проводят с помощью рабочих таблиц. Для заполнения таблицы необходимо расположить варианты в возрастающем или убывающем порядке. Эту операцию называют ***ранжированием***.

Вариационным рядом называется ранжированный ряд вариантов с соответствующими частотами n_i, причем $\sum n_i = n$ – есть объем выборки. В зависимости от объема выборки и от того, какие значения может принимать признак, вариационные ряды делятся на дискретные и непрерывные (интервальные).

Вариационный ряд называется ***дискретным***, если значения признака отличаются друг от друга на некоторую величину, и ***непрерывным***, если значения признака могут отличаться на сколь угодно малую величину.

В случае если изучаемый показатель принимает немного различных числовых значений, в частности для выборок малого ($n \le 30$) объема строят дискретный вариационный ряд (таблицу). В первом столбце таблицы, перечисляют все значения x_i признака в возрастающем порядке, во втором соответствующие частоты n_i. Если все значения признака встречаются по одному разу, т.е. все $n_i = 1$, то второй столбец можно опустить. Далее заполняют таблицу, в зависимости от того, какие формулы будут применяться для нахождения выборочных характеристик (*статистик*), а именно:

Выборочная средняя

Характеризует центр выборочного распределения и находится по формулам:

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i , \tag{12.1}$$

где $к$ - число различных значений.

Если ввести понятие и обозначение ***относительной частоты***

$$w_i = \frac{n_i}{n} , \tag{12.2}$$

то формула (12.1) примет вид:

$$\bar{x}_в = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot w_i . \tag{12.3}$$

Иногда выборочная средняя плохо характеризует выборочную совокупность. Это происходит в тех случаях, когда колебания вариантов около нее достаточно велики. Для того чтобы оценить колеблемость изучаемого признака, используют различные показатели вариации. К числу основных таких показателей относятся: выборочная дисперсия, выборочное стандартное отклонение, выборочное исправленное стандартное отклонение, коэффициент вариации и др.

Выборочная дисперсия

Выборочная дисперсия показывает абсолютный разброс и вычисляется для выборок большого объема по одной из формул, в зависимости от формы представленной исходной информации:

$$D_в = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x}_в)^2 \cdot n_i , \tag{12.4}$$

$$D_в = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_в)^2 \cdot w_i , \tag{12.5}$$

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot n_i - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot n_i - (\bar{x}_в)^2, \qquad (12.6)$$

$$D_в = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot w_i - \left(\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot w_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot w_i - (\bar{x}_в)^2 . \qquad (12.7)$$

Выборочное исправленное стандартное отклонение в квадрате

Эта выборочная характеристика (статистика) обозначается $S_в^2$, применяется для выборок малого объема, характеризует абсолютный разброс, как и дисперсия, но связана с дисперсией: $S_в^2 = \frac{n}{n-1} D_в$, поэтому вычисляется по формуле:

$$S_в^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_в)^2 \cdot n_i . \qquad (12.8)$$

Выборочное стандартное отклонение

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} . \qquad (12.9)$$

Выборочное исправленное стандартное отклонение

$$S_в = \sqrt{S_в^2} . \qquad (12.10)$$

Интервальный (непрерывный) вариационный ряд строят для непрерывно варьирующего признака, а также для выборок большого $(n > 30)$ объема, где в первом столбце таблицы записывают непересекающиеся интервалы. Первый и последний интервалы могут быть открытыми, т.е. иметь только одну границу. В процессе обработки данных открытые интервалы приходится условно закрывать. Для этого обычно, в случае интервалов разной длины, величину первого интервала принимают равной величине второго, а величину последнего – величине предпоследнего. В случае интервалов одинаковой длины, крайние интервалы принимают равными этой же величине. Во втором столбце таблицы записывают количество значений, попавших в каждый интервал. Далее осуществляют переход от интервального ряда к дискретному, заменяя интервалы их серединами $\tilde{x}_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$ и записывают эти значения в следующем столбце таблицы.

Для вычисления выборочных характеристик применяют формулы указанные выше, в которых x_i заменяют на $\tilde{x}_i$.

Например, формула (12.1) для выборочной средней будет иметь вид:

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i \cdot n_i , \tag{12.11}$$

формула (12.4) для выборочной дисперсии станет следующей:

$$D_в = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} (\tilde{x}_i - \bar{x}_в)^2 \cdot n_i . \tag{12.12}$$

Для оценки относительного разброса значений относительно среднего значения $\bar{x}_в$ используют ***коэффициент вариации*** V**,** который измеряется в % и для выборок большого и малого объемов находится по формулам соответственно:

$$V = \frac{\sigma_в}{\bar{x}_в} \cdot 100\% . \tag{12.13}$$

$$V = \frac{S_в}{\bar{x}_в} \cdot 100\% . \tag{12.14}$$

Принято считать, что если коэффициент вариации V больше 35%, то изучаемая совокупность является неоднородной, и колеблемость признака высокая. Следовательно, использование выборочной средней для ее характеристики неверно, т.к. она не типична для изучаемой совокупности. В таком случае следует применять моду или медиану.

Модой вариационного ряда (обозначается M_0) называется то значение x_i, которому соответствует наибольшая частота n_i.

Медианой вариационного ряда (обозначается M_e) называется значение x_i, которое является серединой ранжированного вариационного ряда, т.е. половина вариантов имеют значения большие, чем медиана, а половина меньшие, чем медиана.

Все описанные выше выборочные характеристики носят названия *точечных* оценок, поскольку определяются одним числом (точкой).

Точечная оценка параметра генеральной совокупности, особенно при выборках малого объема, может существенно отличаться от оцениваемого параметра и приводить к грубым ошибкам. По этой причине используют ***интервальные оценки***.

Интервальная оценка неизвестного параметра распределения представляет собой ***доверительный интервал***, который с определенной (заданной) ***надежностью*** γ (***доверительной вероятностью***) накрывает неизвестный, оцениваемый параметр. С доверительной вероятностью связано такое понятие, как ***уровень значимости*** – α, а именно имеет место соотношение: $\alpha = 1 - \gamma$.

Границы доверительного интервала вычисляются по выборке.

Доверительный интервал для оценки генеральной средней $\bar{x}_г$ или, что одно и тоже, параметра a нормального распределения имеет вид:

$$\bar{x}_в - \Delta < a < \bar{x}_в + \Delta, \qquad (12.15)$$

где $\bar{x}_в$ – среднее выборочное, а Δ – точность оценки.

Точность оценки Δ находится следующим образом:

а) для *малых* выборок ($n \le 30$)

$$\Delta = T(n, \gamma)\frac{S_в}{\sqrt{n}}, \qquad (12.16)$$

где $T(n,\gamma)$ – коэффициент доверия, значения которого для выборки объема n и заданной надежности γ находятся по таблице (приложение 3).

б) для *больших* выборок (n >30)

$$\Delta = t_\gamma \cdot \frac{\sigma_в}{\sqrt{n}}, \qquad (12.17)$$

t_γ – коэффициент, значения которого для заданной надежности γ находятся по таблице значений функции Лапласа (приложение 2), а именно: t_γ является решением уравнения $\Phi(t_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$.

Графическое изображение вариационных рядов

Для изображения дискретных вариационных рядов служит ***полигон***. Для его построения в прямоугольной системе координат наносят точки с координатами $(x_i; n_i)$ или $(x_i; w_i)$, которые соединяют отрезками прямых. Полученная ломаная линия называется соответственно ***полигон частот*** или ***полигон относительных частот***.

Гистограмма служит для изображения интервального вариационного ряда. Для ее построения в прямоугольной системе координат по оси абсцисс откладывают отрезки, соответствующие интервалам варьирования, и на них, как на основаниях, строят прямоугольники с высотами равными или частотам n_i, или относительным частотам w_i, или плотностям относительных частот $\frac{w_i}{h}$, где h – длина интервала. Полученная фигура, состоящая из примыкающих друг к другу прямоугольников, называется соответственно: или ***гистограммой частот*** или ***гистограммой относительных частот*** или ***гистограммой плотностей относительных частот***.

Замечание. Если в интервальном вариационном ряде встречаются интервалы разной длины, то при построении гистограммы по оси ординат необходимо откладывать плотности относительных частот $\frac{w_i}{h}$, т.е. строить гистограмму плотностей относительных частот.

Судя по гистограмме или полигону можно сделать предположение о законе распределения изучаемого показателя. Например, если сгладить гистограмму плавной линией, и она будет похожа на колоколообразную линию, то можно предположить, что распределение близко к нормальному.

Замечание. При построении полигона или гистограммы можно выбирать разный масштаб на осях координат.

Пример 12.1

Имеются данные о проценте премий за каждый месяц истекшего года на коммерческом предприятии: 1; 3; 5; 4; 3; 5; 3; 2; 3; 4; 2; 4.

Необходимо по этим данным:

1) Построить дискретный вариационный ряд изучаемой случайной величины и представить его графически.

2) определить средний месячный процент премий за год, оценить абсолютный и относительный разброс.

3) Построить доверительный интервал, в котором с вероятностью γ =0,98 заключено значение среднего процента премий.

Решение:

1) В рассматриваемом примере имеется выборка малого объема: n =12. Для составления вариационного ряда выпишем из условия задачи значения изучаемой случайной величины в возрастающем порядке и укажем частоты n_i, с которыми каждое значение встретилось. Оформим расчеты в таблице 12.1. По данным первого и второго столбцов построим полигон частот (рис. 12.1).

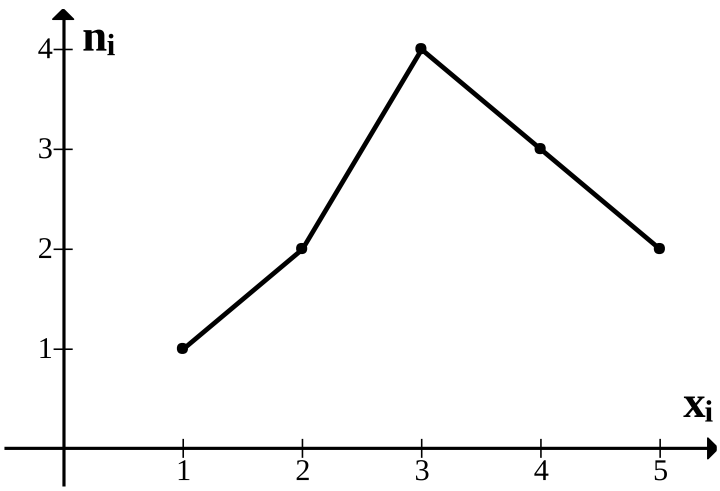

Рисунок 12.1

2) Средний месячный процент премий за год можно оценить выборочной средней для имеющихся данных, которую определим по формуле (12.1), используя сумму значений третьего столбца таблицы 12.1. Оценкой абсолютного разброса для выборок малого объема служит

выборочное исправленное стандартное отклонение $S_в$, которое найдем, используя формулы (12.8) и (12.10).

Таблица 12.1

Значения показателя x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$(x_i - \bar{x}_в)^2 \cdot n_i$
1 2 3 4 5	1 2 4 3 2	1 4 12 12 10	5,063 3,125 0,25 1,688 6,125
$\sum$	**12**	**39**	**16,251**

Итак, средний месячный процент премий составит:

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i = \frac{1}{12}39 = 3{,}25.$$

Выборочное исправленное стандартное отклонение равно:

$$S_в = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x}_в)^2 \cdot n_i} = \sqrt{\frac{1}{11}16{,}251} = \sqrt{1{,}477} \approx 1{,}22.$$

Для оценки относительного разброса значений относительно среднего значения $\bar{x}_в$ вычислим коэффициент вариации V по формуле (12.14). Итак, коэффициент вариации равен:

$$V = \frac{S_в}{\bar{x}_в} \cdot 100\% = \frac{1{,}22}{3{,}25} \cdot 100\% = 37{,}54\%.$$

Коэффициент вариации больше 35%, из чего можно сделать вывод, что изучаемая статистическая совокупность не является однородной, и колеблемость признака высока. Следовательно, выборочная средняя не типична для изучаемой совокупности. В качестве оценки среднемесячного процента премий следует выбрать либо моду: M_0=3 (чаще встречается $n_3 = 4$, см. таблицу 5.1), либо медиану M_e, которая также равна трем.

3) Доверительный интервал, в котором с вероятностью γ=0,98 заключен средний месячный процент премий найдем, используя формулы (12.15) и (12.16). Определим точность Δ интервальной оценки:

$\Delta = T(n,\gamma)\dfrac{S_в}{\sqrt{n}} = 2{,}72\dfrac{1{,}22}{\sqrt{12}} = \dfrac{3{,}32}{3{,}46} = 0{,}96$, где коэффициент доверия $T(n,\gamma) = T(12,\ 0{,}98) = 2{,}72$ найден по таблице (приложение 2).

Найдем границы доверительного интервала. Левая: $\bar{x}_в - \Delta = 3{,}25 - 0{,}96 = 2{,}29$; правая: $\bar{x}_в + \Delta = 3{,}25 + 0{,}96 = 4{,}21$. Итак, с надежностью γ=0,98 можно утверждать, что значение среднего месячного процента премий принадлежит интервалу (2,29; 4,21).

Пример 12.2

Для анализа экономической эффективности работы торгового предприятия были собраны данные за три месяца о дневной выручке (у.е.), которые представлены в виде интервального вариационного ряда.

Выручка (у.е.)	менее 20	(20;30]	(30;40]	(40;50]	(50;60]	более 60
Число дней	6	15	24	28	14	4

По данным обследования необходимо:

1) Провести первичную обработку результатов, а именно: построить гистограмму частот; определить выборочные характеристики для дневной выручки; оценить абсолютный и относительный разброс значений.

2) Полагая, что дневная выручка есть случайная величина, имеющая нормальное распределение, найти доверительный интервал, в котором с вероятностью γ=0,9524 заключено среднее значение дневной выручки.

Решение:

1) В рассматриваемом примере объем выборки n=91. Вся область наблюдаемых значений (дневная выручка) разбита на k=6 непересекающихся интервалов, причем крайние – открытые. Учитывая, что все интервалы равной длины h=10, первый и последний представим соответственно в виде (10;20] и (60;70]. Оформим расчеты в таблице 12.2. В первом столбце запишем частичные интервалы, во втором – частоты n_i из

условия задачи.

Таблица 12.2

Интервалы по количеству верных ответов	n_i	$\tilde{x}_i$	$\tilde{x}_i \cdot n_i$	$\left(\tilde{x}_i - \overline{x}_в\right)^2 \cdot n_i$
(10; 20]	6	15	90	3602,97
(20; 30]	15	25	375	3155,93
(30; 40]	24	35	840	487,08
(40; 50]	28	45	1260	845,46
(50; 60]	14	55	770	3361,33
(60; 70]	4	65	260	2599,98
$\sum$	**91**		**3595**	**14052,75**

Построим гистограмму частот (рис. 12.2). Для этого по оси абсцисс отложим интервалы, длиной $h=10$, в которые попадают наблюдаемые значения, а затем на этих интервалах, как на основаниях, построим прямоугольники, высоты которых равны соответствующим частотам n_i.

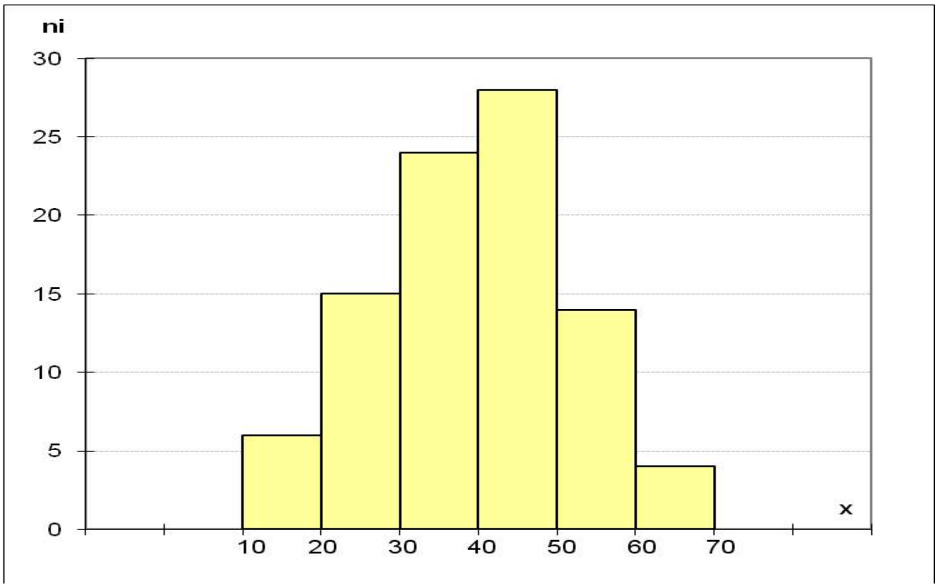

Рисунок 12.2

Для вычисления выборочных характеристик применим формулы (12.11) и (12.12). Результаты вычислений запишем в столбцах расчетной таблицы 12.2. В третьем столбце запишем середины интервалов. Суммируя результаты четвертого столбца, получим $\sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i \cdot n_i$. Разделив эту сумму на объем выборки найдем значение выборочной средней: $\bar{x}_в = \frac{1}{91} 3595 = 39{,}505$. Сумму результатов последнего столбца, разделив на объем выборки, получим по формуле (12.12) значение выборочной дисперсии: $D_в = \frac{1}{91} 14052{,}75 = 154{,}43$. Тогда выборочное стандартное отклонение по формуле (5.9) будет равно: $\sigma_в = \sqrt{154{,}43} = 12{,}43$.

Коэффициент вариации определим по формуле (12.13), в результате получим: $V = \frac{12{,}43}{39{,}505} \cdot 100\% \approx 31{,}46\%$.

Коэффициент вариации находится в пределах 35%, следовательно, изучаемая статистическая совокупность является однородной, и колеблемость признака не высока. Использование выборочной средней для оценки дневной выручки оправдано.

2) Судя по гистограмме (рис. 12.2) можно сделать предположение, что дневная выручка есть случайная величина, имеющая распределение близкое к нормальному. Чтобы найти доверительный интервал, в котором с вероятностью γ=0,9524 заключено значение средней дневной выручки, необходимо определить точность Δ интервальной оценки. Воспользуемся формулой (12.17) для выборок большого объема: $\Delta = t_\gamma \frac{\sigma_в}{\sqrt{n}}$, где t_γ – корень уравнения $\Phi(t_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$. При заданной надежности интервальной оценки γ =0,9524 или $\frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}9524}{2} = 0{,}4762$, получаем, что значение функции Лапласа $\Phi(t_\gamma) = 0{,}4762$, следовательно, ее аргумент по таблице значений функции Лапласа $\Phi(x)$ (см. приложение 1) должен быть равен t_γ=1,98. Итак, t_γ

найдено, тогда $\Delta = 1{,}98 \cdot \frac{12{,}43}{\sqrt{91}} = 2{,}58$. Вычислим границы доверительного интервала. Левая: $\bar{x}_в - \Delta$ =39,505–2,58=36,92; правая: $\bar{x}_в + \Delta$ =39,505+2,58=42,09. Доверительный интервал имеет вид (36,92; 42,09). Таким образом, среднее значение дневной выручки попадает в интервал (36,92; 42,09) с вероятностью 0,9524.

Тема 13. Элементы теории корреляции

В различных экономических задачах часто возникает необходимость обобщить полученную в процессе исследования информацию с целью построения аналитических зависимостей, пригодных для использования в имитационных и прогнозных моделях. Все процессы и явления, в той или иной степени взаимосвязаны друг с другом. Так, например, уровень производительности труда работников предприятия зависит от совершенства применяемого оборудования, степени совершенства технологии, организации производства труда и других различных факторов. С помощью статистических методов можно установить зависимость и дать ей количественную характеристику. Простейшей формой связи является ***линейная зависимость***. Далее будем рассматривать взаимосвязь двух признаков X и Y.

На практике для самых разнообразных явлений массового характера имеет место ***стохастическая*** зависимость, т.е. признаки X и Y связаны между собой, но эта взаимосвязь между переменными не однозначна, а подвержена случайным изменениям, т.е. при определенном значении признака X признак Y принимает заранее не предсказуемое значение. Это объясняется тем, что кроме признака X на изменчивость Y влияет много других, не учтенных связей.

Стохастическую зависимость можно изучать методами корреляционного и регрессионного анализа. ***Корреляционная зависимость*** определяет наличие и форму связи, тесноту этой связи, устанавливает и анализирует зависимость между значениями одной переменной, например X, и соответствующими ей среднегрупповыми $\bar{y}_x$ значениями другой. Для выяснения вида зависимости между x и $\bar{y}_x$ используют графическое изображение выборки, а именно: ***диаграмму рассеяния*** или ***корреляционное поле***. Диаграммой рассеяния называется совокупность n точек плоскости с координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – значения признака X, а $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – соответствующие значения признака Y. Построив диаграмму рассеяния, визуально определяют наличие и направление связи, величину разброса значений. Так же можно сделать предположение о виде корреляционной зависимости: линейной или нелинейной.

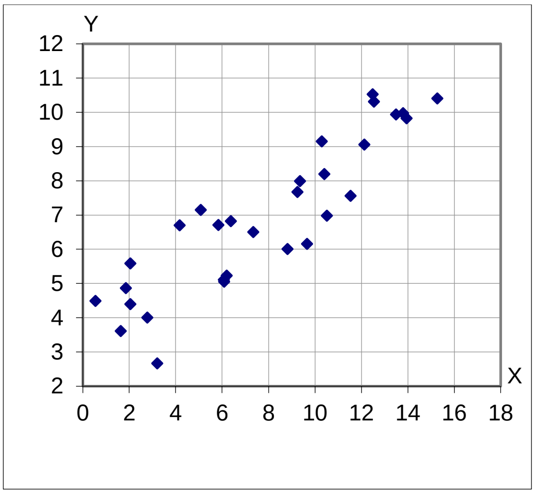

Рисунок 13.1а

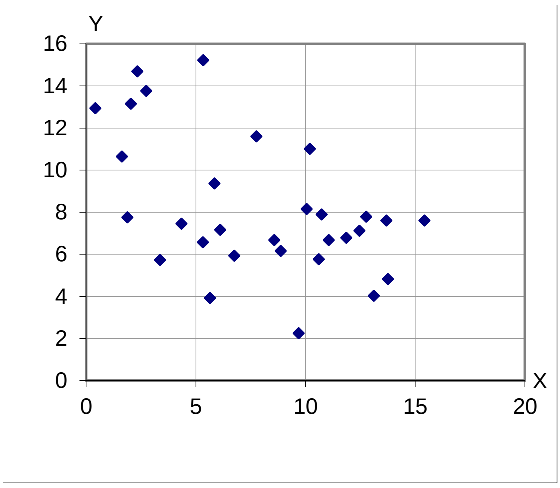

Рисунок 13.1б

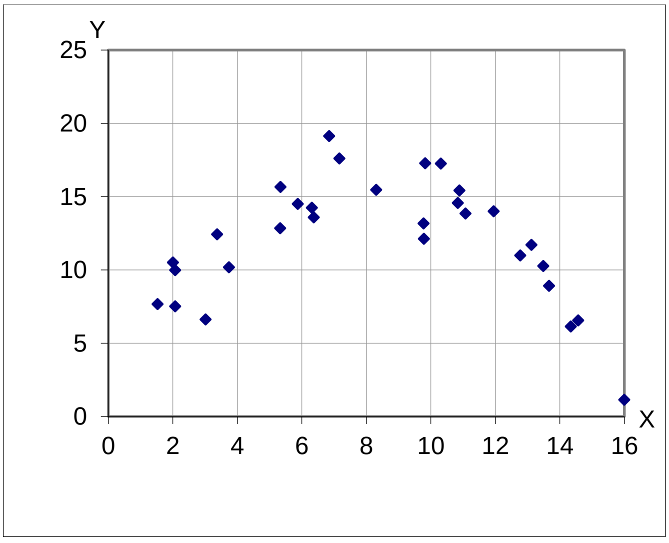

Рисунок 13.1в

Рисунок 13.1а иллюстрирует наличие тесной, положительно ориентированной линейной связи. На рисунке 13.1б показан случай, когда линейная связь менее тесная и отрицательно ориентирована. На рисунке 13.1в представлена диаграмма нелинейной связи между величинами *X* и *Y*.

Замечание. При построении диаграммы масштаб на осях координат следует выбирать так, чтобы размахи варьирования обоих переменных: $R_x = x_{\max} - x_{\min}$ и $R_y = y_{\max} - y_{\min}$ были приблизительно равными.

Если точки диаграммы рассеяния сосредоточены возле некоторой прямой, т.е. можно предположить, что корреляционная связь между признаками X и Y является линейной (рис.13.1а, б), то эту зависимость можно характеризовать ***функцией регрессии*** y по x вида:

$$\bar{y}_x = a_o + a_1 x, \qquad (13.1)$$

где a_o и a_1 – неизвестные коэффициенты такой зависимости.

Определение числовой оценки тесноты линейной корреляционной связи между признаками X и Y осуществляется при помощи так называемого ***выборочного коэффициента корреляции*** $r_в$.

Приступая к исследования, вначале изучается каждый признак X и Y в отдельности, а именно, находят соответствующие признакам X и Y средние выборочные $\bar{x}_в$ и $\bar{y}_в$ и выборочные стандартные отклонения $\bar{\sigma}_x$ и $\bar{\sigma}_y$ по формулам, которые выписаны в теме 12.

Если число выборочных данных невелико и частоты $n_i = 1$, то формула (12.1) для вычисления $\bar{x}_в$ может быть записана в виде:

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad (13.2)$$

соответственно для вычисления $\bar{y}_в$ эта формула примет вид:

$$\bar{y}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i. \qquad (13.3)$$

Для вычисления выборочных стандандартных отклонений, используя формулы (12.6) и (12.9) и, учитывая, что $n_i = 1$, получим:

$$\bar{\sigma}_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x}_в)^2}, \qquad (13.4)$$

$$\bar{\sigma}_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (\bar{y}_в)^2}. \qquad (6.4)$$

Следующий этап статистического исследования – это установление зависимости между X и Y.

В общей постановке эта задача неразрешима, т.к. одному значению признака X может соответствовать целый спектр значений признака Y. Поэтому поставим более узкую задачу. Определим корреляционную зависимость между признаками X и Y, при которой происходит изменение среднего значения одного из признаков при изменении значений другого признака.

Пусть $\bar{y}_x$ – среднее значение признака Y, когда признак X принимает значение, равное x. Для нахождения линейной корреляционной зависимости между признаками X и Y вначале определяют уровень (тесноту) этой зависимости, т.е. вычисляют выборочный коэффициент корреляции $r_в$ по формуле:

$$r_в = \frac{1}{\bar{\sigma}_x \cdot \bar{\sigma}_y}\left(\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}\right), \qquad (13.6)$$

где $\overline{x \cdot y}$ – среднее значение произведений соответствующих выборочных значений признаков X и Y, т.е. при $n_i = 1$ имеем $\overline{x \cdot y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$, а произведение $\bar{x} \cdot \bar{y}$– есть произведение средних значений. Итак, формула (6.5) при $n_i = 1$ примет вид:

$$r_в = \frac{1}{\bar{\sigma}_x \cdot \bar{\sigma}_y}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) =$$

$$= \frac{1}{\bar{\sigma}_x \cdot \bar{\sigma}_y}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \bar{x}_в \cdot \bar{y}_в\right). \qquad (13.7)$$

Выборочный коэффициент корреляции является величиной безразмерной и его значение находится в пределах от -1 до $+1$, т.е. $|r_в| \le 1$ или $-1 \le r_в \le +1$.

Выборочный коэффициент корреляции характеризует линейную связь между признаками X и Y:

Если $|r_в|$ близок к 1, то эта связь тесная.

Если $|r_в|$ близок к 0, то эта связь слабая.

Если $r_в > 0$, то говорят, что связь между признаками X и Y положительно ориентирована, т.е. $\bar{y}_x$, в основном, возрастает при возрастании x (рис. 13.1а).

Если $r_в < 0$, то говорят, что связь между признаками X и Y отрицательно ориентирована, т.е. $\bar{y}_x$, в основном, убывает при возрастании x (рис. 13.1б).

Пусть корреляционная зависимость между признаками X и Y является линейной, тогда уравнение регрессии $\bar{y}_x$, можно записать в виде:

$$\bar{y}_x = \bar{y}_в + r_в \cdot \frac{\bar{\sigma}_y}{\bar{\sigma}_x}\left(x - \bar{x}_в\right). \qquad (13.8)$$

Преобразовав это уравнение к виду 6.1, получим уравнение линейной корреляционной зависимости y по x.

Выборочное уравнение линейной регрессии используется при статистических исследованиях для вычисления предполагаемых средних значений одного из признаков, когда известно значение другого.

Для оценки степени пригодности рассчитанного уравнения функциональной зависимости в тех или иных практических целях нужно знать меру рассеяния эмпирических точек относительно линии, т.к. иногда это рассеяние настолько велико, что нет смысла использовать для прогноза полученное уравнение корреляционной связи. Погрешность такого прогноза может быть слишком велика.

В качестве меры достоверности уравнения регрессии используют ***среднюю квадратическую ошибку уравнения*** S_{xy}, представляющую собой среднее квадратическое отклонение эмпирических значений y_i и значений $\hat{y}_i$, рассчитанных по уравнению регрессии:

$$S_{xy} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}}. \qquad (13.9)$$

Значения $\hat{y}_i$ рассчитываются подстановкой признака x_i в полученное уравнение корреляционной связи.

Чем меньше рассеяние эмпирических точек вокруг прямой, тем меньше средняя квадратическая ошибка уравнения S_{xy}, т.е. она служит показателем значимости и полезности прямой, выражающей соотношение между изучаемыми признаками.

Пример 13.1.

Для анализа зависимости X - объема импорта и Y - взыскание платежей в бюджет были собраны данные за девять отчетных периодов:

Объем импорта (у.е.)	61	53	55	58	62	65	58	52	63
Взыскание платежей (у.е.)	165	140	120	170	185	170	180	150	180

По имеющимся выборочным данным необходимо:

1) построить диаграмму рассеяния;

2) полагая, что между признаками X и Y имеет место линейная корреляционная зависимость определить выборочный коэффициент корреляции $r_в$, сделать вывод о направлении и тесноте этой связи;

3) найти выборочное уравнение линейной регрессии. Используя полученное уравнение, оценить ожидаемое среднее значение взысканий

платежей в бюджет (признак Y), когда объем импорта (признак X) составит значение x_0=56 (у.е.);

4) построить линию регрессии на том же рисунке, на котором построена диаграмма рассеяния.

Решение:

1) Построим диаграмму рассеяния, чтобы визуально определить наличие связи между X и Y, используя данные из условия задачи.

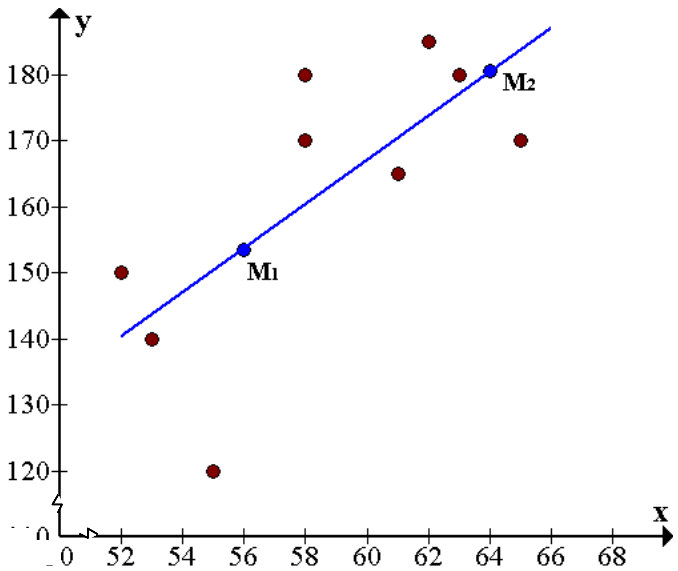

Рисунок 13.2

2) По направлению точек на диаграмме рассеяния (рисунок 13.2) видно, что с возрастанием значений X значения Y также возрастают. Следовательно, можно говорить о наличии прямо пропорциональной (возрастающей) линейной корреляционной зависимости.

Для облегчения расчетов построим вспомогательную таблицу 13.1.

Таблица 13.1

	X	Y	X^2	Y^2	$X \cdot Y$
	61	165	3721	27225	10065
	53	140	2809	19600	7420
	55	120	3025	14400	6600
	58	170	3364	28900	9860
	62	185	3844	34225	11470
	65	170	4225	28900	11050
	58	180	3364	32400	10440
	52	150	2704	22500	7800
	63	180	3969	32400	11340
$\sum$	**527**	**1460**	**31025**	**240550**	**86045**

Определим выборочный коэффициент корреляции $r_в$ по формуле (13.7). Вычислим выборочные характеристики для признаков X и Y, используя формулы (13.2-13.5):

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{9}527 = 58{,}56;$$

$$\bar{y}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{9}1460 = 162{,}22;$$

$$\bar{\sigma}_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x}_в)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}31025 - (58{,}56)^2} = \sqrt{3447{,}22 - 3429{,}27} =$$

$$= \sqrt{17{,}95} = 4{,}24;$$

$$\bar{\sigma}_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (\bar{y}_в)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}240550 - (162{,}22)^2} = \sqrt{26727{,}78 - 26315{,}33} =$$

$$= \sqrt{412{,}45} = 20{,}53.$$

Вычислим выборочный коэффициент корреляции по формуле (13.7):

$$r_в = \frac{1}{\bar{\sigma}_x \cdot \bar{\sigma}_y}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \bar{x}_в \cdot \bar{y}_в\right) = \frac{1}{4{,}24 \cdot 20{,}53}\left(\frac{1}{9}86045 - 58{,}56 \cdot 162{,}22\right) =$$

$$= \frac{1}{87{,}05}(9560{,}56 - 9499{,}6) = 0{,}7.$$

Выборочный коэффициент корреляции положителен, следовательно, между признаками X и Y имеет место положительно ориентированная линейная корреляционная зависимость.

3) Найдем выборочное уравнение линейной регрессии, используя формулу (6.7).

$$\bar{y}_x = 162{,}22 + 0{,}7 \cdot \frac{20{,}53}{4{,}24}(x - 58{,}56) = 162{,}22 + 3{,}39(x - 58{,}59) =$$

$$= 162{,}22 + 3{,}39\,x - 198{,}62 = 3{,}39\,x - 36{,}4.$$

Итак, уравнение линейной регрессии имеет вид:

$$\bar{y}_x = 3{,}39\,x - 36{,}4.$$

Используя полученное уравнение, оценим ожидаемое среднее значение признака Y – взыскание платежей в бюджет, когда признак X – объем импорта примет значение, равное 56, т.е. x_0=56 (у.е.) – точка, в которой рассчитывается прогноз.

Подставим в полученное уравнение регрессии $x = 56$. Получим $\bar{y}_x = 3{,}39 \cdot 56 - 36{,}4 = 189{,}84 - 36{,}4 \approx 153{,}4$.

Итак, следует ожидать значение взысканий платежей в бюджет на уровне 153,4 (у.е.), если объем импорта составит 56 (у.е.);

4) Построим прямую линию регрессии $\bar{y}_x = 3{,}39\,x - 36{,}4$ на рисунке 13.2. Для этого определим координаты двух любых точек этой прямой, например: при $x_1 = 56$ $\bar{y}_x = 153{,}4$, т.е. $M_1(56;\ 153{,}4)$;

при $x_2 = 64$ $\bar{y}_x = 180{,}6$, т.е. $M_2(64; 180{,}6)$.

Проведем прямую через точки M_1 и M_2, которая и будет линией регрессии y по x.

Пример 13.2. Имеются данные за восемь отчетных периодов о соответствующих значениях текучести кадров (признак X) на выпуск качественной продукции (признак Y):

Текучесть кадров X (%)	0,3	0,5	0,9	0,7	0,4	0,2	0,5	0,7
Выпуск качественной продукции Y (%)	90	89	78	85	89	95	85	79

Необходимо:

1) построить диаграмму рассеяния;

2) полагая, что между признаками X и Y имеет место линейная корреляционная зависимость определить выборочный коэффициент корреляции $r_в$, сделать вывод о направлении и тесноте этой связи;

3) найти выборочное уравнение линейной регрессии. Используя полученное уравнение, оценить ожидаемое среднее значение признака Y, когда признак X примет значение x_0=0,6 (%);

4) построить линию регрессии на том же рисунке, на котором построена диаграмма рассеяния.

Решение:

1) Построим диаграмму рассеяния, используя данные из условия задачи (рисунок 13.3).

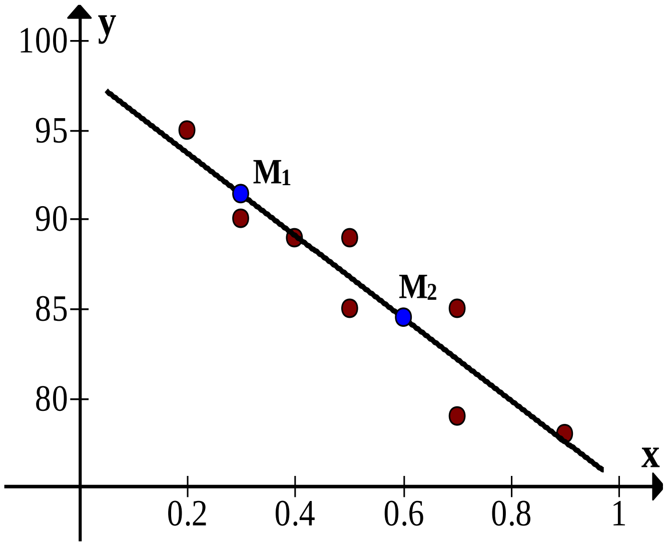

Рисунок 13.3

2) По расположению точек на диаграмме, можно говорить о наличии убывающей линейной корреляционной зависимости.

Определим выборочный коэффициент корреляции $r_в$ по формуле (13.7). Для этого составим расчетную таблицу 13.2 и найдем суммы по всем ее столбцам.

Таблица 13.2

	X	Y	X^2	Y^2	$X \cdot Y$
	0,3	90	0,09	8100	27,0
	0,5	89	0,25	7921	44,5
	0,9	78	0,81	6084	70,2
	0,7	85	0,49	7225	59,5
	0,4	89	0,16	7921	35,6
	0,2	95	0,04	9025	19,0
	0,5	85	0,25	7225	42,5
	0,7	79	0,49	6241	55,3
$\sum$	**4,2**	**690**	**2,58**	**59742**	**353,6**

Вычислим выборочные характеристики для признаков X и Y, используя формулы 13.2-13.5:

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{8}4{,}2 = 0{,}525\,;$$

$$\bar{y}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{8}690 = 86{,}25\,;$$

$$\bar{\sigma}_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x}_в)^2} = \sqrt{\frac{1}{8}2{,}58 - (0{,}525)^2} = \sqrt{0{,}3225 - 0{,}2756} =$$

$$= \sqrt{0{,}0469} = 0{,}2166\,;$$

$$\bar{\sigma}_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (\bar{y}_в)^2} = \sqrt{\frac{1}{8}59742 - (86{,}25)^2} = \sqrt{7467{,}75 - 7439{,}063} =$$

$$= \sqrt{28{,}687} = 5{,}356\,.$$

Вычислим выборочный коэффициент корреляции по формуле (6.6):

$$r_в = \frac{1}{\bar{\sigma}_x \cdot \bar{\sigma}_y}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \bar{x}_в \cdot \bar{y}_в\right) = \frac{1}{0{,}2166 \cdot 5{,}356}\left(\frac{1}{8}353{,}6 - 0{,}525 \cdot 86{,}25\right) =$$

$$= \frac{1}{1{,}16}\left(44{,}2 - 45{,}281\right) = -0{,}93.$$

Выборочный коэффициент корреляции отрицателен и близок к –1. Следовательно, между признаками X и Y имеет место тесная отрицательно ориентированная линейная корреляционная зависимость.

3) Найдем выборочное уравнение линейной регрессии, используя формулу (13.8).

$$\bar{y}_x = 86{,}25 - 0{,}93 \cdot \frac{5{,}356}{0{,}2166}\left(x - 0{,}525\right) = 86{,}25 - 22{,}997(x - 0{,}525) =$$

$$= 86{,}25 - 22{,}997\,x + 12{,}073 = -22{,}997\,x + 98{,}323.$$

Итак, уравнение линейной регрессии имеет вид:

$$\bar{y}_x = -22{,}997\,x + 98{,}323.$$

Используя полученное уравнение, оценим ожидаемое среднее значение признака Y, когда признак X примет значение, равное 0,6 (%), т.е. подставим в полученное уравнение регрессии $x = 0{,}6$. Получим $\bar{y}_x = -22{,}997 \cdot 0{,}6 + 98{,}323 = -13{,}798 + 98{,}323 \approx 84{,}5$.

Следовательно, ожидаемое среднее значение качественной продукции равно 84,4 (%), если текучесть кадров будет на уровне 0,6 (%).

4) Построим прямую линию регрессии на рисунке 13.3. Для этого определим координаты двух любых точек этой прямой, например:

при $x_1 = 0{,}3$ $\bar{y}_x = 91{,}4$, т.е. $M_1(0{,}3;\ 91{,}4)$;

при $x_2 = 0{,}6$ $\bar{y}_x = 84{,}4$, т.е. $M_2(0{,}6; 84{,}5)$.

Проведем прямую через точки M_1 и M_2, которая и будет линией регрессии *y* по *x*.

Задания для контрольных работ

Задания для контрольной работы № 1 (1-ый семестр)

Задание 1. Найти несколько базисных решений СЛУ. При решении использовать таблицы Гаусса.

В.1 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 5 \end{cases}$.

В.2 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 - 4x_2 + 4x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$.

В.3 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$.

В.4 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$.

В.5 $\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$.

В.6 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_4 = 2 \end{cases}$.

В.7 $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -5 \end{cases}$.

В.8 $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$.

В.9 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -1 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 7 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -8 \end{cases}$.

В.10 $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -4 \end{cases}$.

Задание 2. Даны вершины треугольника.

1) Сделать чертеж.

Найти:

2) уравнение стороны *AB*;

3) длину стороны *AB*;

4) уравнение высоты, опущенной из вершины *C*;

5) длину этой высоты;

6) уравнение прямой, параллельной стороне *AB,* проходящей через вершину *C*;

7) площадь треугольника;

8) уравнение медианы, опущенной из вершины C;

9) точку пересечения высот;

10) внутренний угол треугольника ABC;

Варианты

1.	$A(-3;\ -2)$,	$B(0;\ 10)$,	$C(6;\ 2)$.
2.	$A(1;\ 1)$,	$B(4;\ 13)$,	$C(10;\ 5)$.
3.	$A(0;\ 3)$,	$B(3;\ 15)$,	$C(9;\ 7)$.
4.	$A(-2;\ 0)$,	$B(1;\ 12)$,	$C(7;\ 4)$.
5.	$A(2;\ -1)$,	$B(5;\ 11)$,	$C(11;\ 3)$.
6.	$A(3;\ -3)$,	$B(6;\ 9)$,	$C(12;\ 1)$.
7.	$A(-1;\ 2)$,	$B(2;\ 14)$,	$C(8;\ 6)$.
8.	$A(5;\ -4)$,	$B(8;\ 8)$,	$C(14;\ 0)$.
9.	$A(-4;\ 5)$,	$B(-1;\ 17)$,	$C(5;\ 9)$.
10.	$A(4;\ 4)$,	$B(7;\ 16)$,	$C(13;\ 8)$.

Задание 3. Вычислить пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

Варианты

В.1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-8x^3+x^2}{x^3-2x+4}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x+4}}{x}$

в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{5+14x-3x^2}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos 2x}$

д) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\left[\ln(3x+1)-\ln 3x\right]$.

В.2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x-1}{5-x+4x^2}$ б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{3x^2-40x+128}{8-x}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,3x}{x}$ г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x-1}$.

В.3. $a)$ $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-1)\left[\ln(2x-1)-\ln(2x+2)\right]$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin 3x}{1-\cos 4x}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x - x^2 + 4}{5 - 4x + 3x^2}$ г) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4x^2 - 7x - 2}{2x^2 - x - 6}$ д) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{9 - x^2}{4 - \sqrt{13 + x}}$.

В.4. а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3 + 2x} - \sqrt{x + 4}}{3x^2 - 4x + 1}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^4 - x^3 + 4x}{3 - x^3 - 3x^4}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x + 5}{4x + 3}\right)^{2x-1}$ г) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2 - x}{x^2 - 3x + 2}$ д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x^2}$.

В.5. а) $\lim\limits_{x\to 11} \dfrac{2x^2 - 21x - 11}{x - 11}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 + 4x + 1}{4x - 1 - 2x^2}$ в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$

г) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x - 2} - \sqrt{4 - x}}{x - 3}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty} (2x - 1)\left[\ln(3x + 5) - \ln 3x\right]$.

В.6. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3 - 3x + 2}{1 + 4x + 2x^3}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x + 4}{3x - 1}\right)^{2x+1}$

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x}}{3 - \sqrt{9 - x}}$ г) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{2x^2 + 6x - 8}{x + 4}$ д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 3x}{x^2}$.

В.7. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x + 5}{2x + 3}\right)^{3x-4}$ б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x \sin x}{1 - \cos x}$ в) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$

г) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{5x^2 - 24x - 5}{x^2 - 4x - 5}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x - 1 - 7x^2}{3x^2 - 2x + 4}$.

В.8. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{15x^2 - x + 2}{2x^2 + 4x + 1}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty} (2x - 7)\left[\ln(3x + 4) - \ln(3x)\right]$

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\,tg\,4x}{\sin^2 3x}$ г) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x + 3} - \sqrt{5 + 3x}}{x + 1}$ д) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x - 2}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{6 - x}}$.

В.9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5x^2+7x}{1+4x^2-3x^3}$ б) $\lim\limits_{x\to 0} x\,ctg\,4x$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-3}{3x+5}\right)^{x+1}$

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x-3}$ д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

В.10. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}{x-4}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{tg\,5x}$ д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-3}{2n+5}\right)^{3n+2}$.

Задание 4. Найти производные и дифференциалы функций.

Варианты

В.1

$а)\ y=\left(\dfrac{2}{x^3}-\sqrt[3]{x^2}+5\right)^4,$ $б)\ y=\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{x},$

$в)\ y=5^{\sin^2 x}+\dfrac{1}{\cos x},$ $г)\ y=x^3 3^x+x\,ctgx.$

В.2

$а)\ y=(\cos 3x+5)^7,$ $б)\ y=\dfrac{x-\sin 2x}{2+\cos 2x},$

$в)\ y=2^{arctg\,x}+\ln x^3,$ $г)\ y=x^2\arcsin\sqrt{x}.$

В.3

$а)\ y=(\sin 2x-x+1)^5,$ $б)\ y=(x+3)\arccos x,$

$в)\ y=e^{arctg\sqrt{x}},$ $г)\ y=\sqrt[3]{\ln x}+\dfrac{x-2}{\sqrt{x+1}}.$

В.4

$а)\ y=\left(\arcsin 2x+x^2\right)^3,$ $б)\ y=\dfrac{x-\sin x}{\sqrt{x}},$

$в)\ y=\dfrac{1}{x+5}+3^{\ln\sqrt{x}},$ $г)\ y=x^5 arctg\,x+tg\left(x^2+1\right).$

В.5

$а)\ y=(\cos 3x+1)^2,$ $б)\ y=\dfrac{arcctg\,x+2}{x-1},$

$в)\ y=4^{\frac{2-x}{1+x}},$ $г)\ y=x^2 3^x+\ln\left(x^2+1\right).$

В.6 $a)\ y=\left(5x^3-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+3\right)^7,$ $\quad б)\ y=\dfrac{\arcsin 2x+1}{\sqrt{x}},$

$в)\ y=2^{\cos 3x}+\sqrt{x}\ln x,$ $\quad г)\ y=2^{x+1}+\ln(\cos x).$

В.7 $a)\ y=\left(5x^3-\dfrac{1}{\sqrt{x}}+4\right)^{-3},$ $\quad б)\ y=\lg\left(\dfrac{x+1}{3x-2}\right)^4+\dfrac{\sin 2x}{x},$

$в)\ y=\cos^2(x+3)+\ln^3(2-x),$ $\quad г)\ y=x^3\arccos x.$

В.8 $a)\ y=\left(3x^5-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{2}{x}\right)^7,$ $\quad в)\ y=\dfrac{\sqrt{x^3-1}}{x+1},$

$в)\ y=tg\, x^3+ctg^5 x,$ $\quad г)\ y=(x-1)^5(x+5)+\cos(x+1).$

В.9 $a)\ y=\left(\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{1}{\cos x}+1\right)^2,$ $\quad б)\ y=\dfrac{1-x}{\sin x}+\cos\left(2x^3+1\right),$

$в)\ y=\ln(x+3)^2+\ln^2(x+3),$ $\quad г)\ y=2^{tg\,x+1}+x\arcsin\sqrt{x}.$

В.10 $a)\ y=\left(\sin 3x+x^2+\sqrt{x}\right)^6,$ $\quad б)\ y=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+1}},$

$в)\ y=\dfrac{2}{\cos x}+\ln^2 x,$ $\quad г)\ y=2^{tg\,x}+x\arcsin 2x.$

Задание 5. Дана функция двух переменных $z=f(x,\ y)$.

1) Найдите частные производные первого и второго порядков. Убедитесь в равенстве смешанных производных.
2) Найдите градиенты в общем виде и в точке А.
3) Найдите полный дифференциал функции.

Варианты

1. а) $z=x^2y+1,\quad A(1,1)$; б) $z=\sqrt{x}+e^{x^2-y},\quad A(1,\ 1)$.

2. а) $z=\left(y^2+1\right)x^3,\quad A(1,1)$; б) $z=\ln\left(x^2y-3y^2\right),\quad A(2,\ 1)$.

3. а) $z=\left(x^2+1\right)(y+1),\quad A(1,\ 0)$**;** б) $z=e^{x^2+2y},\quad A(1,\ -0{,}5)$.

4. а) $z=x+y^2,\quad A(0,1)$; б) $z=\sin\left(x^2-y^2\right),\quad A(1,\ 1)$.

5. а) $z=\left(x^2+y^3\right)^2,\quad A(0,\ 1)$**;** б) $z=e^{3+x^2-xy},\quad A(1,\ 4)$.

6. а) $z = y^2(x+y),\quad A(1,1)$; б) $z = x^y,\quad A(2,\,1)$.

7. а) $z = (x^3-1)(y^2+1),\quad A(1,\,2)$; б) $z = \sin(x^3 - y^3),\quad A(1,\,1)$.

8. а) $z = (x^2+4)y^3,\quad A(2,1)$; б) $z = \ln(x^2 + xy),\quad A(2,\,4)$.

9. а) $z = 2(xy^3+2),\quad A(1,\,1)$**;** б) $z = \sqrt{x^3+y^3},\quad A(2,\,1)$.

10. а) $z = (y-1)x^2,\quad A(1,2)$; б) $z = \sin(x^3) + 2y - \dfrac{x}{y},\quad A(0,-1)$.

Задание 6. Найти неопределенные интегралы:

Варианты

В.1

а) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x} - 4x}{\sqrt{x}}\,dx$; б) $\displaystyle\int x^2 \cos x^3\,dx$; в) $\displaystyle\int (2x+3)\cos x\,dx$;

г) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$; д) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

В.2

а) $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+3)^3}\,dx$; б) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt[5]{x}}\,dx$; в) $\displaystyle\int \sin^3 x\,\cos x\,dx$;

г) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\cos^2 x^4}\,dx$; д) $\displaystyle\int \frac{x-1}{e^{2x}}\,dx$.

В.3

а) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x} - 4}{\sqrt[4]{x}}\,dx$; б) $\displaystyle\int \frac{\ln(3x+1)}{3x+1}\,dx$; в) $\displaystyle\int x^3 \ln x\,dx$;

г) $\displaystyle\int \frac{(x+1)}{\cos^2 3x}\,dx$; д) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$.

В.4

а) $\displaystyle\int \sqrt{1-3x}\,dx$; б) $\displaystyle\int \frac{\ln(3x+1)}{3x+1}\,dx$; в) $\displaystyle\int (2x-1)\,2^x\,dx$;

в) $\int \frac{dx}{\sin^2(2-x)}$; г) $\int \arcsin 3x \ dx$.

В.5

а) $\int \frac{x^2}{(x^3-2)^4} dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3+\ln^2 x}}$; в) $\int (2x+3)\ e^{-2x} dx$;

г) $\int \frac{(2x-1)}{\sin^2 x} dx$; д) $\int \frac{x^2\ dx}{2-x^3}$.

В.6

а) $\int \frac{\sqrt[3]{x}-4x}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int x^2 \cos x^3 \ dx$; в) $\int (2x+3) \cos x \, dx$;

г) $\int \frac{(2x+3)}{\cos^2 x} dx$; д) $\int \frac{x^3\ dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

В.7

а) $\int \frac{x^3}{(x^4+4)^5} dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$; в) $\int (3x-1)\ e^{3x} dx$;

г) $\int \frac{(3x+1)}{\cos^2 x} dx$; д) $\int \frac{x^3\ dx}{2x^4-3}$.

В.8

а) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+x+1}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int x^2 e^{x^3} \ dx$; в) $\int \ln\sqrt{1+x^2}\ dx$;

г) $\int (x+2) e^{-x}\ dx$; д) $\int \frac{tg^3 x\ dx}{\cos^2 x}$.

В.9

а) $\int \frac{1}{(3x-1)^4} dx$; б) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$; в) $\int \sqrt{\cos 2x}\ \ \sin 2x \, dx$;

г) $\int \frac{x^4}{\sin^2 x^5} dx$; д) $\int \frac{3-x\ dx}{e^{3x}}$.

В.10

а) $\int \sqrt{5-3x}\ dx$; б) $\int \frac{\ln(2x-1)}{2x-1}dx$; в) $\int (x+1)\ 3^x\ dx$;

г) $\int \frac{dx}{cos^2(3-x)}$; д) $\int arctg\, 2x\ dx$.

Задание 7. Вычислить определённые интегралы:

Варианты

В.1 а) $\int_0^1 \frac{e^x d\,x}{\sqrt{1+e^x}}$; б) $\int_0^{e-1} \ln(x+1)\,d\,x$; в) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}d\,x$.

В.2 а) $\int_0^1 \frac{x\,d\,x}{\left(x^2+1\right)^2}$; б) $\int_0^{\pi} x\sin x\,d\,x$; в) $\int_0^{\pi/2} \sin x\ \cos^3 x\,d\,x$.

В.3 а) $\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{arctg\,x}{1+x^2}d\,x$; б) $\int_0^{1/2} x e^{2x}\,d\,x$; в) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}d\,x$.

В.4 а) $\int_0^{\pi/4} tg\,x\,d\,x$; б) $\int_0^{e} x^2\ln x\,d\,x$; в) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}}d\,x$.

В.5 а) $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{\arcsin x\,d\,x}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int_0^1 x e^{-x}\,d\,x$; в) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}d\,x$.

В.6 а) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^2 x}d\,x$; б) $\int_0^{e} x\ln x\,d\,x$; в) $\int_1^9 \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}d\,x$.

В.7 а) $\int_0^1 \frac{3^x d\,x}{1+9^x}$; б) $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,d\,x$; в) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}-6}{2\sqrt{x}}d\,x$.

В.8 а) $\int_1^{e} \frac{1+\ln x}{x}d\,x$; б) $\int_0^1 x\ 2^x\,d\,x$; в) $\int_{-3}^{3} x\sqrt{9-x^2}\,d\,x$.

В.9 а) $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{2\sin x\,d\,x}{(1-\cos x)^2}$; б) $\int_0^{e} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}d\,x$; в) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}d\,x$.

В.10 а) $\int_{-0,5}^{0,5} \frac{3^x d\,x}{1+9^x}$; б) $\int_0^1 (x+1)e^x\,d\,x$; в) $\int_1^9 \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}}d\,x$.

Задание 8. Вычислить площадь фигуры, ограниченную заданными линиями.

Варианты

В.1 $y=(x-2)^2$, $x-2y+4=0$.

В.2 $y=x^2+4x$, $x-y+4=0$.

В.3 $y = x^2 - 2x + 1, \quad x - y - 1 = 0$.

В.4 $y = x^2 + 1, \quad x - y + 1 = 0$.

В.5 $y = x^2 - 3, \quad 2x + y = 0$.

В.6 $y = (x-4)^2, \quad 2x - y - 8 = 0$.

В.7 $y = x^2 + 2x + 1, \quad x - y + 1 = 0$.

В.8 $y = -x^2, \quad x + y + 2 = 0$.

В.9 $y = 4 - x^2, \quad 2x + y - 4 = 0$.

В.10 $y = x^2 - 10x + 32, \quad y - 16 = 0$.

Задания для контрольной работы № 2 (2-ой семестр)

Задача 1. Данные о распределении работников некоторого предприятия по отделам и полу приведены в таблице.

1) Наудачу отобран один из них. Найти вероятность того, что это:

а) мужчина;

б) работник производственного отдела;

в) женщина, работающая в отделе реализации.

2) На этом же предприятии решено создать группу из трех человек, ответственную за проведение мероприятия. Если людей отбирать случайным образом, то какова вероятность, что это будут:

а) все женщины;

б) две женщины и один мужчина;

в) одна женщина, работающая в бухгалтерии, одна женщина из отдела реализации и мужчина.

Варианты

1.

Подразделения	Женщины	Мужчины
Планово-экономический отдел	2	-
Бухгалтерия	3	1
Отдел маркетинга	3	2
Отдел реализации	4	3
Производственный отдел	16	8
Диспетчерская служба	4	2

2.

Подразделения	Женщины	Мужчины
Планово-экономический отдел	2	1
Бухгалтерия	4	1
Отдел маркетинга	5	-
Отдел реализации	3	3
Производственный отдел	18	9
Диспетчерская служба	3	4

3.

Подразделения	Женщины	Мужчины
Планово-экономический отдел	2	2
Бухгалтерия	2	1
Отдел маркетинга	4	1
Отдел реализации	4	2
Производственный отдел	16	18
Диспетчерская служба	4	4

4.

Подразделения	Женщины	Мужчины
Планово-экономический отдел	3	-
Бухгалтерия	3	1
Отдел маркетинга	4	1
Отдел реализации	2	3
Производственный отдел	13	16
Диспетчерская служба	5	3

5.

Подразделения	Женщины	Мужчины
Планово-экономический отдел	3	-
Бухгалтерия	2	1
Отдел маркетинга	4	2
Отдел реализации	1	5
Производственный отдел	10	17
Диспетчерская служба	2	6

6.

Подразделения	Женщины	Мужчины
Планово-экономический отдел	1	1
Бухгалтерия	4	1
Отдел маркетинга	3	4
Отдел реализации	2	3
Производственный отдел	11	18
Диспетчерская служба	3	6

7.

Подразделения	Женщины	Мужчины
Планово-экономический отдел	3	-
Бухгалтерия	4	-
Отдел маркетинга	4	1
Отдел реализации	1	4
Производственный отдел	12	10
Диспетчерская служба	4	5

8.

Подразделения	Женщины	Мужчины
Планово-экономический отдел	2	-
Бухгалтерия	3	1
Отдел маркетинга	3	3
Отдел реализации	-	4
Производственный отдел	14	16
Диспетчерская служба	5	4

9.

Подразделения	Женщины	Мужчины
Планово-экономический отдел	2	1
Бухгалтерия	3	-
Отдел маркетинга	2	2
Отдел реализации	2	3
Производственный отдел	12	17
Диспетчерская служба	3	6

10.

Подразделения	Женщины	Мужчины
Планово-экономический отдел	2	-
Бухгалтерия	3	-
Отдел маркетинга	2	3
Отдел реализации	2	5
Производственный отдел	15	12
Диспетчерская служба	5	4

Задача 2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения. Найти ее числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Указать их смысловое значение.

Варианты

1.

X	–3	–2	1	2

p_i	0,2	0,3	0,4	0,1

2.

X	–2	–1	0	2	3	4
p_i	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2	0,1

3.

X	1	3	4	5
p_i	0,1	0,3	0,4	0,2

4.

X	–1	0	1	2	3	4
p_i	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1	0,1

5.

X	–2	–1	1	3
p_i	0,3	0,2	0,4	0,1

6.

X	1	2	4	6
p_i	0,2	0,3	0,4	0,1

7.

X	–2	0	1	2	3	4
p_i	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1

8.

X	1	3	4	6
p_i	0,2	0,2	0,5	0,1

9.

X	–2	–1	1	3
p_i	0,2	0,3	0,4	0,1

10.

X	–1	1	3	4
p_i	0,2	0,2	0,3	0,3

Задача 3. Предполагается, что вес в граммах готового блюда – случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону распределения с математическим ожиданием $M(X)$ и средним квадратическим отклонением $\sigma(X)$.

1) Определить вероятность того, что случайно выбранное блюдо будет иметь вес: а) больше q гр.; б) менее g гр.;

2) определить число блюд из m отобранных для контрольного взвешивания, у которых вес будет не менее k_1 и не более k_2 гр.

Варианты

1. $M(X)$=180; $\sigma(X)$=4; q=182; g=177; m=15; k_1=176; k_2=185.

2. $M(X)$=240; $\sigma(X)$=6; q=243; g=237; m=20; k_1=233; k_2=245.

3. $M(X)$=120; $\sigma(X)$=3; q=118; g=125; m=18; k_1=116; k_2=128.

4. $M(X)$=150; $\sigma(X)$=4; q=152; g=155; m=17; k_1=148; k_2=155.

5. $M(X)$=200; $\sigma(X)$=5; q=216; g=207; m=16; k_1=196; k_2=212.

6. $M(X)$=160; $\sigma(X)$=4; q=162; g=153; m=20; k_1=155; k_2=169.

7. $M(X)$=180; $\sigma(X)$=5; q=178; g=182; m=15; k_1=177; k_2=192.

8. $M(X)$=220; $\sigma(X)$=6; q=224; g=218; m=12; k_1=212; k_2=230.

9. $M(X)$=140; $\sigma(X)$=4; q=138; g=145; m=18; k_1=134; k_2=145.

10. $M(X)$=260; $\sigma(X)$=7; q=255; g=263; m=14; k_1=252; k_2=270.

Задача 4. Имеются выборочные данные о некотором показателе за несколько отчетных периодов. Необходимо:

1) Построить дискретный вариационный ряд изучаемой случайной величины и представить его графически.

2) Определить среднее значение этого показателя, оценить абсолютный и относительный разброс.

3) Построить доверительный интервал, в котором с вероятностью γ заключено среднее значение изучаемого показателя.

Варианты

1. Количество заказов на товары, продаваемые по каталогу (ден. ед.)

3,6; 4,0; 4,2; 4,2; 3,6; 4,0; 4,2; 4,3; 4,2; 4,3; 4,0, γ=0,9;

2. Цена на акции (у.е.)

43; 47; 45; 51; 45; 47; 45; 51; 45; 47, 45; 47, γ=0,99;

3. Объем товарооборота (ден. ед.)

61,2; 58,4; 65, 1; 67,4; 58,4; 61,2; 65,1; 61,2; 65,1; 65,1, γ=0,8;

4. Количество сделок (ед.)

23; 30; 25; 26; 30; 25; 23; 26; 26; 25; 32; 26, γ=0,99;

5. Величина основных фондов (ден. ед.)

60; 55; 68; 68; 54; 55; 60; 63; 54; 63; 55, 60; 60; 63, γ=0,8;

6. Месячная прибыль фирмы (ден. ед.)

4,3; 4,0; 4,2; 4,2 ; 3,6; 4,0; 4,2; 4,3; 4,2; 4,3; 4,0; 3,6, γ=0,9;

7. Месячная рентабельность (%)

23,5; 30,5; 25; 26; 30,5; 25; 23,5; 26; 26; 25; 32; 26, γ=0,95;

8. Коэффициент ритмичности работы

0,3; 0,5; 0,5; 0,4; 0,3; 0,6; 0,4; 0,6; 0,3; 0,4; 0,2; 0,4, γ=0,8;

9. Выручка от реализации продукции (ден. ед.)

530; 650; 680; 650; 590; 650; 590; 680; 590; 650, γ=0,95;

10. Количество заказов (шт./день)

7; 7; 9; 8; 6; 9; 7; 6; 7; 8; 5; 7; 6; 8, γ=0,99.

Задача 5. В результате выборочного обследования рабочих, имеющих стаж менее 5 лет, была получена информация об их месячной зарплате (тыс.руб.), которая представлена в виде интервального вариационного ряда.

По данным обследования необходимо:

1) Провести первичную обработку результатов, а именно: построить гистограмму частот; определить выборочные характеристики для зарплаты; оценить абсолютный и относительный разброс значений.

2) Полагая, что заработная плата есть случайная величина, имеющая нормальное распределение, найти доверительный интервал, в котором с вероятностью γ заключено среднее значение зарплаты.

Варианты

1. γ =0,9616

Зарплата (тыс.руб.)	менее 8	(8;10]	(10;12]	(12;14]	(14;16]	более 16
Количество человек	2	11	18	20	7	4

2. γ =0,9642

Зарплата (тыс.руб.)	менее 6	(6;10]	(10;14]	(14;18]	(18;22]	более 22
Количество человек	1	9	19	16	7	2

3. γ =0,9108

Зарплата (тыс.руб.)	менее 9	(9;11]	(11;13]	(13;15]	(15;17]	более 17
Количество человек	4	12	20	19	8	3

4. γ =0,9586

Зарплата (тыс.руб.)	менее 7,5	(7,5; 11,5]	(11,5;15,5]	(15,5;19,5]	более 19,5
Количество человек	3	12	23	14	4

5. γ =0,9342

Зарплата (тыс.руб.)	менее 7	(7;9]	(9;11]	(11;13]	(13;15]	более 15
Количество человек	1	8	20	18	11	3

6. γ=0,9312

Зарплата (тыс.руб.)	менее 8,5	(8,5;12,5]	(12,5;16,5]	(16,5;20,5]	более 20,5
Количество человек	4	10	24	8	2

7. γ=0,9556

Зарплата (тыс.руб.)	менее 7	(7;11]	(11;15]	(15;19]	более 19
Количество человек	3	18	21	16	4

8. γ=0,9328

Зарплата (тыс.руб.)	менее 8	(8;12]	(12;16]	(16;20]	более 20
Количество человек	5	14	16	11	2

9. γ=0,9476

Зарплата (тыс.руб.)	менее 10	(10;12]	(12;14]	(14;16]	(16;18]	более 18
Количество человек	6	11	15	12	9	2

10. γ=0,9652

Зарплата (тыс.руб.)	менее 9	(9;13]	(13;17]	(17;21]	более 21
Количество человек	5	15	23	12	3

Задача 6. При изучении химического состава плодов черники было обследовано десять образцов ягод и получены следующие данные о содержании сухих веществ X (%) и органических кислот Y (%) в исследуемых образцах. Выполнить следующую статистическую обработку данных:

1. построить диаграмму рассеяния;
2. полагая, что между признаками X и Y имеет место линейная корреляционная зависимость определить выборочный коэффициент корреляции $r_в$, сделать вывод о направлении и тесноте этой связи;
3. найти выборочное уравнение линейной регрессии. Используя полученное уравнение, оценить ожидаемое среднее значение признака Y, когда признак X примет значение $x = x_0$ (%);

4. построить линию регрессии на том же рисунке, на котором построена диаграмма рассеяния.

Варианты

1. x_0=14,9

Сухое вещество X (%)	14,4	14,9	14,0	15,2	15,3	13,5	14,9	14,8	15,0	14,2
Органические кислоты Y (%)	1,19	1,23	0,96	1,36	1,42	1,1	1,22	1,3	1,23	1,12

2. x_0=13,7

Сухое вещество X (%)	13,8	14,7	14,0	15,1	15,3	13,5	14,6	14,8	14,9	14,3
Органические кислоты Y (%)	1,18	1,22	0,95	1,32	1,42	1,1	1,17	1,3	1,24	1,1

3. x_0=13,8

Сухое вещество X (%)	14,5	14,7	14,0	15,1	15,3	13,5	14,9	14,8	14,3	15,0
Органические кислоты Y (%)	1,2	1,22	0,95	1,32	1,42	1,1	1,22	1,3	1,13	1,21

4. x_0=14,1

Сухое вещество X (%)	13,5	14,7	14,0	15,1	15,3	13,5	14,9	14,8	15,0	14,3
Органические кислоты Y (%)	1,11	1,21	0,95	1,34	1,42	1,1	1,22	1,3	1,23	1,1

5. x_0=14,2

Сухое вещество X (%)	13,9	14,6	14,0	15,2	15,3	13,5	14,9	14,8	15,0	14,6
Органические кислоты Y (%)	1,2	1,2	0,95	1,34	1,41	1,1	1,22	1,3	1,23	1,18

6. x_0=14,7

Сухое вещество X (%)	14,3	14,8	14,0	15,1	15,3	13,5	14,9	14,8	15,1	14,4
Органические кислоты Y (%)	1,19	1,22	0,95	1,34	1,42	1,1	1,22	1,3	1,26	1,16

7. x_0=14,5

Сухое вещество X (%)	14,5	14,7	14,0	15,1	15,3	13,5	14,9	14,8	15,0	14,3
Органические кислоты Y (%)	1,21	1,22	0,98	1,32	1,42	1,1	1,27	1,3	1,23	1,1

8. x_0 =14,6

Сухое вещество X (%)	14,1	14,7	14,0	15,1	15,4	13,5	14,9	14,8	15,0	14,3
Органические кислоты Y (%)	1,14	1,22	0,99	1,34	1,43	1,1	1,22	1,3	1,23	1,1

9. x_0 =14,1

Сухое вещество X (%)	14,5	14,8	14,0	15,1	15,3	13,6	14,9	14,8	14,9	14,1
Органические кислоты Y (%)	1,2	1,22	1,04	1,36	1,42	1,15	1,26	1,29	1,26	1,1

10. x_0 =13,9

Сухое вещество X (%)	14,2	14,8	14,0	15,0	15,3	13,5	14,8	14,8	15,0	14,3
Органические кислоты Y (%)	1,27	1,24	0,97	1,34	1,41	1,1	1,22	1,3	1,23	1,1

Критерии и шкала оценивания результатов выполнения контрольной работы

Шкала оценивания	Критерии оценивания
«отлично»	Обучающийся полностью и правильно выполнил задание КР. Показал отличные знания, умения и владения навыками применения их при решении задач в рамках усвоенного учебного материала. КР оформлена аккуратно и в соответствии с предъявляемыми требованиями
«хорошо»	Обучающийся выполнил задание КР с небольшими неточностями. Показал хорошие знания, умения и владения навыками применения их при решении задач в рамках усвоенного учебного материала. Есть недостатки в оформлении КР
«удовлет-ворительно»	Обучающийся выполнил задание КР с существенными неточностями. Показал удовлетворительные знания, умения и владения навыками применения их при решении задач в рамках усвоенного учебного материала. Качество оформления КР имеет недостаточный уровень
«неудов-летвори-тельно»	При выполнении КР обучающийся продемонстрировал недостаточный уровень знаний, умений и владения ими при решении задач в рамках усвоенного учебного материала

Библиографический список

Основная литература

1. Прошкин, С. С. Математика для решения физических задач [Электронный ресурс] : учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по техническим и технологическим направлениям / С. С. Прошкин.- Санкт-Петербург : Лань, 2014. - 1 эл. опт. диск (CD-ROM) Режим доступа:

http://lib3.sfu-kras.ru/ft/lib2/elib_dc/lan_01.04.2017/i-126969380.pdf

2. Математика. Числовые и функциональные ряды [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие для практических занятий / Сиб. федер. ун-т, Ин-т математики и фундамент. информатики ; сост.: С. Н. Светлакова, Т. А. Позднякова. - Электрон. текст. данные (PDF, 831 Кб). - Красноярск : СФУ, 2015. - 122 с.

Режим доступа: http://lib3.sfu-kras.ru/ft/lib2/elib/b22/i-158777394.pdf

3. Справочник по математике для бакалавров [Электронный ресурс] : учебное пособие для студентов вузов / А. Ю. Вдовин, Н. Л. Воронцова, Л. А. Золкина.- Санкт-Петербург : Лань, 2014. - 1 эл. опт. диск (CD-ROM) Режим доступа:

http://lib3.sfu-kras.ru/ft/lib2/elib_dc/lan_01.04.2017/i-225246247.pdf

Дополнительная литература

4. Математика и экономико-математические модели [Текст] : учебник для вузов по направлению подготовки: 080100 - "Экономика" / С. В. Юдин. - Москва : РИОР : ИНФРА-М, 2016.

Приложение 1

Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0.64	0,2389	0,96	0.3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0.3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0.66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0.0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0.37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0.2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0.75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0.3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0.2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0.2881	1,12	0,3686
0.17	0,0675	0.49	0.1879	0,81	0.2910	1,13	0.3708
0,18	0,0714	0.50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0.1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0.21	0.0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0.3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0.3051	1,18	0,3810
0.23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0.3106	1,20	0.3849
0.25	0,0987	0.57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0.1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0.27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0.3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0.60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0.31	0,1217	0,63	0,2357	0.95	0,3289		

Продолжение приложения 1

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0.3962	1,59	0,4441	1,92	0.4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1.60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0.4941
1.28	0.3997	1,61	0,4463	1,94	0.4738	2,54	0,4945
1,29	0.4015	1,62	0.4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1.31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1.32	0.4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2.62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1.34	0.4099	1,67	0.4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1.35	0,4115	1,68	0,4535	2.02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0.4965
1,37	0,4147	1,70	0.4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1.39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2.78	0,4973
1.41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1.43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1.44	0.4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1.45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1.46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1.47	0.4292	1,80	0.4641	2,26	0,4881	2,92	0.4982
1.48	0,4306	1.81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984

Окончание приложения 1

1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0.4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1.89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0.4719	2.48	0,4934	5,00	0,499997

Приложение 2

Таблица значений коэффициента $T(n,\gamma)$

n	γ					
	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
3	1,886	2,92	4,30	6,96	9,92	31,6
4	1,638	2,35	3,18	4,54	5,84	12,94
5	1,533	2,13	2,77	3,75	4,60	8,61
6	1,476	2,02	2,57	3,36	4,03	6,86
7	1,440	1,943	2,45	3,14	3,71	5,96
8	1,415	1,895	2,36	3,00	3,50	5,40
9	1,397	1,860	2,31	2,90	3,36	5,04
10	1,383	1,833	2,26	2,82	3,25	4,78
11	1,372	1,812	2,23	2,76	3,17	4,59
12	1,363	1,796	2,20	2,72	3,11	4,49
13	1,356	1,782	2,18	2,68	3,06	4,32
14	1,350	1,771	2,16	2,65	3,01	4,22
15	1,345	1,761	2,14	2,62	2,98	4,14
16	1,341	1,753	2,13	2,60	2,95	4,07
17	1,337	1,746	2,12	2,58	2,92	4,02
18	1,333	1,740	2,11	2,57	2,90	3,96
19	1,330	1,734	2,10	2,55	2,88	3,92
20	1,328	1,729	2,09	2,54	2,86	3,88
21	1,325	1,725	2,09	2,53	2,84	3,85
22	1,323	1,721	2,08	2,52	2,83	3,82
23	1,321	1,717	2,07	2,51	2,82	3,79
24	1,319	1,714	2,07	2,50	2,81	3,77
25	1,318	1,711	2,06	2,49	2,80	3,74
26	1,316	1,708	2,06	2,48	2,79	3,72
27	1,315	1,706	2,06	2,48	2,78	3,71
28	1,314	1,703	2,05	2,47	2,77	3,69
29	1,313	1,701	2,05	2,47	2,76	3,67
30	1,311	1,699	2,04	2,46	2,76	3,66