Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт торговли и сферы услуг

МАТЕМАТИКА

Методические указания к выполнению контрольных работ
для студентов направления подготовки
«19.03.02 Продукты питания из растительного сырья»
всех профилей заочной формы обучения

Красноярск 2023

Математика: Методические указания к выполнению контрольных работ для студентов направления подготовки 19.03.02 «Продукты питания из растительного сырья», всех профилей заочной формы обучения / Сост.: Коюпченко И.Н., Попова Е. А, Раковская С.А. Сиб. федерал. ун-т, Красноярск. – 2023.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Математические дисциплины имеют важное значение как для всего процесса обучения в институте, так и для последующей деятельности специалиста. Они необходимы для успешного освоения многих специальных дисциплин.

Цель изучения математических дисциплин в вузе состоит в освоении студентами основ математического, развитии навыков логического и алгоритмического мышления, привитии умения самостоятельно изучать прикладную математическую литературу, выработке умения моделировать реальные процессы, освоении приемов исследования и решения математически формализованных задач.

Данные методические указания к выполнению контрольных работ для студентов направления подготовки 19.03.02 «Продукты питания из растительного сырья» всех профилей заочной формы обучения соответствуют программе.

В настоящих методических указаниях приводятся рекомендации по изучению разделов и тем курса «Математика» и варианты контрольных работ, которые должны выполнить студенты в процессе изучения курса.

Номер варианта и задания должны оканчиваться на одну и ту же цифру, что и учебный шифр студента (номер зачетной книжки).

Контрольная работа выполняется в тонкой тетради. Решения задач следует располагать в порядке возрастания номеров. Условия задач выписывать обязательно. На обложке тетради должны быть указаны фамилия, имя, отчество студента, его учебный шифр, специальность, домашний адрес, а также наименование дисциплины и номер контрольной работы.

Приступая к выполнению контрольной работы, сначала следует изучить теоретический материал и ознакомиться с решением типовых задач, приведенных в настоящих методических указаниях. Решения задач должны быть оформлены аккуратно, с подробными пояснениями и с указанием используемых формул. В результате проверки преподаватель делает одно из двух заключений относительно выполненной работы: «допущен к защите» и «не допущен к защите». Студент обязан исправить в ней все отмеченные рецензентом ошибки и сдать работу на повторную проверку.

Тема 1. Матрицы и определители

Матрицы, основные понятия и определения

В практической деятельности матрицы имеют широкое применение в различных областях. Например, удобно записывать в виде матриц данные о выпуске продукции разного типа, об объемах производства или продаж за несколько отчетных периодов или о нормах затрат различных видов ресурсов на производство единицы продукции и т.д. Также часто используется понятие матриц и при математической постановке задач оптимального планирования, приводимых к системам линейных уравнений.

Определение 1.1. *Матрицей A размера* $m \times n$ называется прямоугольная таблица элементов, которая записывается в круглых скобках, т.е. имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (1.1)$$

где a_{ij} – элементы матрицы (действительные числа),

m – число строк;

n – число столбцов;

i – номер строки, $i = \overline{1, m}$;

j – номер столбца, $j = \overline{1, n}$.

Матрицу (1.1) можно обозначать $A_{m \times n} = (a_{i\,j})$.

Определение 1.2. Две матрицы A и B называются *равными* $(A = B)$, если они имеют одинаковые размеры и их соответствующие элементы равны.

Определение 1.3. Матрица (1.1) называется *квадратной*, если $m = n$. Другими словами это матрица размера $n \times n$.

Определение 1.4. В квадратной матрице элементы с одинаковыми индексами $a_{i\,i}$ $(i = \overline{1, n})$ образуют *главную диагональ*, перпендикулярно ей расположены элементы, образующие *побочную диагональ*.

Определение 1.5. Квадратная матрица называется *диагональной*, если все ее элементы кроме элементов главной диагонали – нули, т.е. матрица вида:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0\ldots 0 \\ 0 & a_{22}\ldots 0 \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0\ldots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 1.6. Диагональная матрица называется *единичной* (обозначается E), если все элементы главной диагонали – единицы, т.е.:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0\ldots 0 \\ 0 & 1\ldots 0 \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0\ldots 1 \end{pmatrix}.$$

Определение 1.7. Квадратная матрица называется *треугольной*, если все ее элементы под главной диагональю или над ней – нули, т.е. матрицы вида:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad B=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Операции над матрицами

Линейные операции над матрицами

Над матрицами можно производить ряд операций, причем некоторые из них аналогичны операциям с числами, а некоторые специфические.

Определение 1.8. *Алгебраической суммой матриц* A и B одинаковой размерности называется матрица $C=A\pm B$ того же размера, элементы которой равны $c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}$.

Пример 1.1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Найти $C=A+B$ и $D=A-B$.

Решение: $C=A+B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, а $D=A-B=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Определение 1.9. *Произведением матрицы* A *на действительное число* γ называется матрица, каждый элемент которой получен умножением соответствующего элемента матрицы A на число γ:

$$\gamma \cdot A = \left(\gamma \cdot a_{ij}\right).$$

Пример 1.2. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти $2 \cdot A$.

Решение: При умножении матрицы на число $\gamma = 2$ все ее элементы умножаются на это число, следовательно, будем иметь: $2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

Произведение матриц

Можно умножать лишь матрицы, у которых число столбцов в матрице, стоящей в произведении слева равно числу строк в матрице, стоящей в произведении справа.

Определение 1.10. *Произведением матриц* $A_{m \times n} = \left(a_{ij}\right)$ и $B_{n \times p} = \left(b_{jk}\right)$ называется матрица $C_{m \times p} = \left(c_{ik}\right)$, где элементы $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$, т.е. элемент c_{ik} матрицы C равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

Замечание. Произведение матриц *не коммутативно*, т.е. $A \times B \neq B \times A$.

Пример 1.3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Найти $C = A \cdot B$

Решение: Число столбцов в матрице A равно числу строк в матрице B. Чтобы получить элемент c_{11} нужно найти сумму произведений элементов первой строки матрицы A на соответствующие элементы первого столбца матрицы B. Для вычисления значения элемента c_{12} нужно сложить произведения элементов первой строки матрицы A на соответствующие элементы второго столбца матрицы B и т.д., т.е. будем иметь:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot 0+(-1)\cdot 1+2\cdot 2 & 1\cdot 1+(-1)\cdot 1+2\cdot(-2) \\ 0\cdot 0+2\cdot 1+3\cdot 2 & 0\cdot 1+2\cdot 1+3\cdot(-2) \\ 1\cdot 0+4\cdot 1+1\cdot 2 & 1\cdot 1+4\cdot 1+1\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 8 & -4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Определение 1.11. Матрица A^T, полученная из матрицы A путем замены строк на столбцы с теми же номерами, называется *транспонированной матрицей*.

Пример 1.4. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Записать транспонированную матрицу A^T.

Решение: При транспонировании заменяем строки столбцами с теми же номерами, т.е. для матрицы A транспонированной A^T будет матрица вида: $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Определители

Понятие *определителя матрицы* существует только для *квадратных* матриц.

Определение 1.12. Пусть дана матрица размером 2×2, т.е: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, ее элементы определяют *число* $a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$, которое называется *определителем второго порядка*, соответствующим матрице A (записывают определитель в прямых скобках). Обозначают определитель:

$$\det A = \Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}. \tag{1.2}$$

Пример 1.5. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ найти определитель.

Решение: $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1) - 2\cdot 3 = -7$.

Определение 1.13. Матрице третьего порядка соответствует *определитель третьего порядка*, который вычисляется по формуле:

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}-$$

$$-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} \qquad (1.3)$$

Таким образом, определитель третьего порядка равен сумме произведений трех его элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Эти произведения берутся с определенными знаками: с тем же знаком – три члена, состоящие из элементов главной диагонали и элементов, расположенных в вершинах треугольников с основаниями параллельными главной диагонали; с противоположным знаком – три члена, расположенные аналогичным образом относительно побочной диагонали. Поэтому этот способ вычисления определителя третьего порядка называют «правилом треугольников».

Пример 1.6. Вычислить определитель третьего порядка $\Delta=|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$.

Решение: $\Delta=|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}=$

$=1\cdot 0\cdot(-1)+6\cdot 4\cdot(-3)+2\cdot(-2)\cdot 3-3\cdot 0\cdot(-3)-4\cdot(-2)\cdot 1-6\cdot 2\cdot(-1)=$

$=-72-12+8+12=-64.$

Свойства определителей.

1^0. При транспонировании матрицы ее определитель не изменяется.

2^0. При перестановке соседних строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.

3^0. Определитель равен нулю, если все элементы строки (столбца) определителя равны нулю.

4^0. Определитель равен нулю, если имеются несколько строк (столбцов) с пропорциональными (в частности равными) элементами.

5^0. Общий множитель всех элементов строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

6^0. Значение определителя не изменится, если к элементам его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число γ.

Замечание. Для определителей третьего и более высоких порядков справедливы еще *два свойства*, которые дают другие способы вычисления определителей.

Для дальнейшего изложения необходимо ввести понятия алгебраических дополнений A_{ij} и миноров M_{ij} для элемента a_{ij}.

Определение 1.14. Минором M_{ij} для элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из исходного вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Определение 1.15. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij} называется *минор* M_{ij}, взятый с определенным знаком, а именно: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

7^0. (Теорема о разложении). Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Определитель можно *разложить по элементам любой строки (столбца).* Например, разложение определителя третьего порядка по i-ой строке дает формула:

$$\Delta = |A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3},$$

где A_{ij} - алгебраические дополнения соответствующих элементов a_{ij}.

8^0. Если определитель имеет треугольный или диагональный вид (определитель, записанный для треугольной или диагональной матрицы), то он равен произведению элементов его главной диагонали. Например:

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n} \\ 0 & a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 0 & 0 \quad \ldots a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}.$$

Указание. Для приведения определителя к треугольному виду следует воспользоваться свойством 6^0.

Пример 1.7. Для определителя из примера 1.6 найти M_{23} и A_{21}.

Решение: Чтобы найти M_{23} вычеркнем мысленно в данном определителе вторую строку и третий столбец, получим определитель второго порядка:

$$M_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=4-6=-2.$$

Для нахождения A_{21} необходимо M_{21} умножить на $(-1)^{2+1}$, т.е. $A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}$, следовательно $A_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=-(-2+12)=-10$.

Пример 1.8. Вычислить определитель из примера 1.6 разложением по второй строке:

Решение: $$\Delta=|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}=6\cdot A_{21}+0\cdot A_{22}-2\cdot A_{23}=$$

$$=6\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}+(-2)\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-60+2\cdot(-2)=-64.$$

Определители для удобства вычислений можно приводить к треугольному виду, применяя свойства.

Пример 1.9. Вычислить определитель из примера 1.6, приведя его к треугольному виду.

Решение:

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -12 & 16 \\ 0 & -2 & 8 \end{vmatrix}=-(-2)\cdot 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}=8\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}=-64.$$

Здесь в первом определителе элементы первой строки умножили на –6 и прибавили к соответствующим элементам второй; элементы первой же строки умножили на –3 и прибавили к соответствующим элементам третьей строки (свойство 6). Получили второй определитель, в котором элементы второй и третьей строк имеют общий множитель, которые вынесены за знак третьего определителя (свойство 5): из второй строки вынесен множитель 4, а из третьей –2, также вторую и третью строки поменяли местами и поменяли перед определителем знак (свойство 2). В третьем определителе элементы второй строки умножили на 3 и прибавили к соответствующим элементам третьей. Получили определитель треугольного вида (все элементы под главной диагональю равны нулю), который равен произведению элементов на главной диагонали (свойство 8).

Обратная матрица

Определение 1.16. Матрица называется *обратной* для матрицы A (обозначается A^{-1}), если для нее выполняются равенства:

$$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E. \tag{1.4}$$

Алгоритм вычисления обратной матрицы:

1. Вычислить определитель матрицы $|A|$. Если $|A|=0$, то матрица A - *вырожденная* (*особенная*) и обратной для нее не существует, если $|A|\neq 0$, то – *неособенная или невырожденная* и для нее можно найти A^{-1}.
2. Записать транспонированную матрицу A^T для матрицы A.
3. Вычислить *присоединенную* матрицу $\overline{A}$, элементами которой являются алгебраические дополнения для элементов транспонированной матрицы.
4. Вычислить обратную матрицу по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\overline{A}. \tag{1.5}$$

Пример 1.10. Для матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}$ найти обратную матрицу A^{-1}. Сделать проверку.

Решение: применим описанный выше алгоритм нахождения A^{-1}.

1. Вычисляем определитель: $|A|=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{vmatrix} = -12+10=-2\neq 0,$ следовательно, матрица *неособенная* или *невырожденная*.

2. Запишем транспонированную матрицу A^T для матрицы A:

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

3. Вычислим *присоединенную* матрицу $\overline{A}$. Для этого найдем алгебраические дополнения для всех элементов транспонированной матрицы:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot (-4) = -4 \qquad A_{12} = (-1)^3 \cdot (-2) = 2$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot 5 = -5 \qquad A_{22} = (-1)^4 \cdot 3 = 3.$$

Запишем присоединенную матрицу $\overline{A} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Вычислим обратную матрицу по формуле (1.5): $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \overline{A}$.

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Проверка. Воспользуемся определением (1.4) обратной матрицы: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$. Найдем произведение

$$A^{-1} \cdot A = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -12+10 & 8-8 \\ -15+15 & 10-12 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Пример 1.11. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ найти обратную матрицу A^{-1}. Сделать проверку.

Решение:

1. Вычисляем определитель $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$ следовательно, матрица A *неособенная или невырожденная*.

2. Запишем транспонированную матрицу A^T для матрицы A:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислим *присоединенную* матрицу $\overline{A}$; для этого найдем алгебраические дополнения для всех элементов транспонированной матрицы.

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 11 \qquad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10 \qquad A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 4 \qquad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3.$$

Итак, присоединенная матрица имеет вид: $\overline{A} = \begin{pmatrix} 11 & -10 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

4. Запишем обратную матрицу, используя формулу (1.5): $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \overline{A}$.

$$A^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 11 & -10 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Проверка. Воспользуемся определением (1.4) обратной матрицы: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$. Найдем произведение

$$A^{-1} \cdot A = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 11 & -10 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 11-20+3 & 33-30-3 & 11-20+9 \\ -4+4+0 & -12+6+0 & -4+4+0 \\ -5+8-3 & -15+12+3 & -5+8-9 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Тема 2. Системы линейных алгебраических уравнений

Определение 2.1. Система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2.1)$$

называется *системой линейных уравнений* (СЛУ), где

x_j - переменные или неизвестные;

a_{ij} - коэффициенты при неизвестных системы, где $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$;

b_i - свободные члены.

Определение 2.2. *Решением СЛУ* называется упорядоченный набор значений переменных, при подстановке которых в систему вместо переменных, каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Решить систему, значит – найти все ее решения, или доказать, что их нет.

Определение 2.3. Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Если система не имеет решений, то она называется *несовместной*.

Определение 2.4. Две системы называются *эквивалентными*, если они имеют одно и то же решения.

Матричная форма записи системы уравнений

Для системы (2.1) введем следующие обозначения:

Матрица A, составленная из коэффициентов при неизвестных системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

- называется *матрицей системы*; матрица-столбец

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{- } \textit{матрицей неизвестных}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} - \textit{матрица свободных членов}.$$

Система (2.1) может быть записана в *матричной форме* или в виде *матричного уравнения*:

$$A \cdot X = B. \tag{2.2}$$

Решение этого матричного уравнения заключается в отыскании такой матрицы X, которая при данных матрицах A и B обращает это уравнение в верное матричное равенство.

Дополним матрицу A системы (2.1) столбцом свободных членов. Полученная матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

называется *расширенной матрицей* системы.

Методы решения систем уравнений

I. Метод обратной матрицы (матричный метод).

Пусть в системе линейных уравнений (2.1) $m = n$, тогда она имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \tag{2.4}$$

или в матричной форме

$$A \cdot X = B, \tag{2.5}$$

где A - квадратная матрица. Пусть матрица A является невырожденной, т.е. для нее существует обратная матрица A^{-1}, тогда, умножив обе части равенства (2.5) слева на A^{-1} и учитывая определение (1.4) будем иметь:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \ ,$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{2.6}$$

Итак, для нахождения решения СЛУ вида (2.4) необходимо найти A^{-1} для невырожденной квадратной матрицы системы A и воспользоваться формулой (2.6).

Пример 2.1. Решить систему матричным методом $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \ x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - \ x_2 + \ 3x_3 = 0 \end{cases}$.

Решение: Для данной системы: матрица системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,

матрицы-столбцы свободных членов $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ и неизвестных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Для нахождения решения по формуле (2.6), необходимо найти для матрицы A обратную, которая уже найдена в примере 11 темы 1:

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 11 & -10 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, решение $X = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 11 & -10 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$.

Итак, $x_1 = 1{,}5;$ $x_2 = 0;$ $x_3 = -0{,}5$, или $(1{,}5;\ 0;\ -0{,}5)$.

II. Метод Крамера (решение СЛУ по формулам Крамера).

Пусть Δ - определитель матрицы системы (2.4), а Δ_j - определитель, полученный из определителя Δ заменой j-го столбца столбцом свободных членов B. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то система (2.4) имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \text{ где } j = \overline{1,n}. \tag{2.7}$$

Формулы (2.7) называют *формулами Крамера.*

*Замечание***:** если определитель матрицы системы $\Delta = 0$ и при этом все $\Delta_j = 0,$ то система имеет бесконечное множество решений. Если же $\Delta = 0$ и хотя бы один из определителей $\Delta_j \neq 0$, то система несовместна.

Пример 2.2. Решить систему по формулам Крамера

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2. \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение: Для данной системы формулы Крамера (2.7) будут иметь вид: $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$, где $j = \overline{1,3}$. Вычислим $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$. Следовательно, система имеет единственное решение.

Вычислим все три Δ_j, которые получаются из определителя Δ заменой j–го столбца столбцом свободных членов B.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -9; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{-6} = 0; \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}.$$

Итак, $(1{,}5;\ 0;\ -0{,}5)$.

Полученное решение совпадает с решением этой же системы матричным методом (пример 1).

III. Метод Гаусса и Жордана-Гаусса.

Решение системы методом обратной матрицы и по формулам Крамера часто оказывается трудоемкой задачей и применимо лишь когда $m = n$, более универсальный и эффективный метод (легко реализуемый на компьютере) – метод Гаусса или метод Жордана-Гаусса.

В основе этих методов лежат *элементарные преобразования систем*, в результате которых, из исходной системы уравнений получают эквивалентную ей систему специального вида, а именно: с матрицей треугольного (метод Гаусса) или диагонального (метод Жордана-Гаусса) вида.

К элементарным преобразованиям систем относятся:

1) перестановка строк;
2) умножение всех элементов строки на число $\lambda \neq 0$;
3) прибавление к элементам любой строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на число $\lambda \neq 0$;
4) исключение из матрицы нулевой строки.

За*мечание*. Если в процессе преобразований получается строка, которой соответствует уравнение вида: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b \neq 0$, то система несовместна.

Применяя эти методы, следует записать расширенную матрицу СЛУ и с помощью элементарных преобразований привести матрицу системы к треугольному виду (метод Гаусса), где все элементы ниже главной диагонали станут нулевыми. Затем записать СЛУ и с помощью так называемого «обратного хода» найти неизвестные. А именно: из последнего уравнения определяют неизвестное. Найденное значение подставляют в предыдущее уравнение и решают его, и т.д. продолжают находить все неизвестные СЛУ.

Преобразовывая расширенную матрицу системы по методу Жордана-Гаусса, добиваются того, чтобы матрица СЛУ имела диагональный вид. Далее записывают СЛУ по преобразованной матрице, и все неизвестные будут определены.

Решение СЛУ методом Гаусса

Пример 2.3. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1+3x_2+\ \ x_3=1\\ 2x_1+3x_2+2x_3=2.\\ x_1-\ x_2+\ 3x_3=0\end{cases}$$

Решение: Запишем расширенную матрицу системы и приведем к треугольному виду матрицу системы, используя элементарные преобразования. Желательно, чтобы элементы главной диагонали равнялись единицам.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 3 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 2 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 2 & -1\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Вторая, эквивалентная матрица получена следующим образом: 1-ю строку умножили на -2 и прибавили ко второй строке; 1-ю строку умножили на -1 и прибавили к третьей строке. Третья матрица получена делением на -3 второй строки. Четвертая матрица получена умножением на 4 второй строки и прибавлением ее к третьей строке. Последняя, пятая матрица получена делением элементов третьей строки на 2. Итак, матрица системы (первые три столбца) имеет треугольный вид, причем элементы, расположенные на главной диагонали равны единицам.

После преобразований число оставшихся уравнений равно 3, и число неизвестных тоже три, следовательно, система имеет единственное решение. По последней матрице восстановим систему уравнений и «обратным ходом» найдем решение:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+\ x_3=1\\ \qquad x_2\qquad=0\\ \qquad\quad x_3=-\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_1+3\cdot 0-\frac{1}{2}=1\\ x_2=0\\ x_3=-\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_1=\frac{3}{2}\\ x_2=0\\ x_3=-\frac{1}{2}\end{cases}\quad\text{или}\quad(1{,}5;\ 0;\ -0{,}5).$$

Решение совпадает с решениями, полученными ранее другими методами.

Решение СЛУ методом Жордана-Гаусса

Пример 2.4. Решить систему уравнений методом Жордана-Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2. \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение: Решая этим методом необходимо преобразовать расширенную матрицу системы так, чтобы привести к диагональному виду матрицу системы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Здесь вторая и третья матрицы получены, так же как и по методу Гаусса.

В четвертой матрице во втором столбце все элементы, кроме a_{22}, должны равняться нулю. Поэтому четвертая матрица получена из третьей следующим образом: элементы второй строки умножаются на -3 и прибавляются к первой; элементы второй строки умножаются на 4 и прибавляются к третьей. Далее элементы третьей строки в четвертой матрице умножаются на $\frac{1}{2}$, чтобы элемент a_{33} стал равен 1. Так получили пятую матрицу. Теперь нужно добиться, чтобы элементы третьего столбца, все кроме a_{33} стали равны 0. Следует заметить, что элемент a_{23} уже равен 0, поэтому вторую строку не преобразовываем, а к первой прибавляем третью, умноженную на -1, тем самым получаем шестую матрицу, где на месте матрицы системы (три первых столбца) расположении диагональная, а именно – единичная E матрица. Восстановив систему по последней матрице, сразу получаем решение: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Решения, полученные всеми методами совпадают. Ответ: $\left(\dfrac{3}{2}; \quad 0; \quad -\dfrac{1}{2}\right)$.

Замечание. Решение можно было оформлять в виде таблицы, т.е. решение удобнее находить с использованием *таблиц Гаусса*.

Решение СЛУ с использованием таблиц Гаусса.

Первая таблица для решаемой системы заполняется следующим образом: в столбцах x_i выписываются коэффициенты при соответствующих переменных; в столбце B - свободные члены. В первой таблице выбирается *ведущий элемент* – любой из ненулевых коэффициентов при неизвестных, желательно равный единице. Строка и столбец, где выбран ведущий элемент также называются *ведущими.* Заполнение каждой следующей таблицы начинаем с ведущей строки. В новую таблицу выписываются элементы ведущей строки из предыдущей таблицы, деленные на ведущий элемент. Все элементы ведущего столбца, кроме ведущего который стал равен единице, обнуляются, используя, например, элементарные преобразования или *правило прямоугольника* (смотри ниже). В новой таблице опять выбираем ведущий элемент только в строке, которая до сих пор не была ведущей. Продолжаем до тех пор, пока все строки не побывают ведущими.

Правило прямоугольника: Чтобы пересчитать новое значение элемента a'_{ij}, нужно вернуться в предыдущую таблицу и мысленно нарисовать прямоугольник так, чтобы пересчитываемый элемент a_{ij} и ведущий a^* располагались на одной его диагонали, тогда на другой диагонали будут располагаться элементы A и B. Новое значение вычисляется по формуле:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a^* - A \cdot B}{a^*} = a_{ij} - \frac{A \cdot B}{a^*}. \qquad (2.8)$$

Задачи с экономическим содержанием

Понятие матриц широко применяется при решении практических задач. Применяя известные действия с матрицами, можно определить объемы производства или продаж за несколько отчетных периодов, прирост производства или продаж по сравнению с предыдущим периодом, выручку, стоимость затрат и т.п.

Пример 2.5. В трех магазинах продаются два типа продукции. Матрицы A_1, A_2 и A_3 – объемы продаж этой продукции в магазинах в первом, втором и третьем месяцах соответственно (усл. ед.). Цена реализации одной условной единицы первого и второго типа продукции задана матрицей B (ден. ед.). Определить: 1) матрицу A - объем продаж за квартал; 2) матрицу C - прирост продаж за третий месяц по сравнению со вторым; 3) выручку каждого магазина за квартал. Проанализировать результаты.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Решение:

1) Объем продаж за квартал – есть сумма матриц A_1, A_2 и A_3, т.е.

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 17 & 18 \\ 18 & 22 \end{pmatrix}.$$

Итак, первый магазин продаст продукции первого типа за квартал на 12 усл. ед., второго типа на 15 усл. ед. Объем продаж второго магазина за квартал продукции первого и второго типа составит соответственно 17 и 18 усл. ед., а третьего 18 и 22 усл.ед.

2) Прирост в третьем месяце по сравнению со вторым для трех магазинов определяется разностью матриц A_3 и A_2, причем положительные элементы показывают, что объем продаж увеличился, отрицательные – уменьшился, нулевые – не изменился.

$$C = A_3 - A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, в третьем месяце по сравнению со вторым в первом магазине объем продаж продукции первого типа увеличился на 1усл. ед. второго типа – на 2. Второй магазин в третьем месяце объем продаваемой продукции первого типа увеличил на 1 усл. ед., а продукции второго типа продал на 1 усл. ед. меньше, чем во втором месяце. У третьего магазина уменьшился объем продаваемой продукции первого типа на 1 усл. ед., а второго типа – не изменился.

3) Выручка каждого магазина за квартал определяется матрицей D.

$$D = A \cdot B = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 17 & 18 \\ 18 & 22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \cdot 5 + 15 \cdot 3 \\ 17 \cdot 5 + 18 \cdot 3 \\ 18 \cdot 5 + 22 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 105 \\ 139 \\ 156 \end{pmatrix}.$$

Итак, выручка от реализации всей продукции за квартал для первого магазина составила 105 ден. ед., для второго – 139 ден. ед. и для третьего – 156 ден. ед.

Пример 2.6. Обувная фабрика специализируется по выпуску изделий трех видов: сапог, кроссовок и ботинок; при этом ежедневно используется сырье трех типов: S_1, S_2 и S_3, которое должно быть израсходовано полностью. Нормы расхода каждого из них на изготовление одной пары обуви и объем расхода сырья за один день заданы в таблице.

Вид сырья	Нормы расхода сырья на изготовление одной пары, усл.ед.			Расход сырья за один день, усл.ед.
	сапог	кроссовок	ботинок	
S_1	5	3	4	2700
S_2	2	1	1	900
S_3	3	2	2	1600

Необходимо:

1) составить систему уравнений для нахождения ежедневного объема выпуска каждого вида обуви;

2) решить эту систему по формулам Крамера;

3) решить систему матричным методом;

4) решить систему, применяя таблицы Гаусса.

Решение: Введем обозначения: пусть ежедневно фабрика выпускает x_1 пар сапог, x_2 пар кроссовок и x_3 пар ботинок.

1) в соответствии с расходом сырья каждого вида получим систему:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2700 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 900 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1600 \end{cases}.$$

2) для решения этой системы по формулам Крамера составим и вычислим определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 9 + 16 - 12 - 12 - 10 = 1;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2700 & 3 & 4 \\ 900 & 1 & 1 \\ 1600 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 100 \cdot \begin{vmatrix} 27 & 3 & 4 \\ 9 & 1 & 1 \\ 16 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 100\,(54 + 48 + 72 - 64 - 54 - 54) = 200;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2700 & 4 \\ 2 & 900 & 1 \\ 3 & 1600 & 2 \end{vmatrix} = 100 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 27 & 4 \\ 2 & 9 & 1 \\ 3 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 100\,(90 + 81 + 128 - 108 - 108 - 80) = 300;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2700 \\ 2 & 1 & 900 \\ 3 & 2 & 1600 \end{vmatrix} = 100 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 & 27 \\ 2 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 16 \end{vmatrix} = 100\,(80 + 81 + 108 - 81 - 96 - 90) = 200.$$

Замечание. При вычислении определителей Δ_i применяли свойство 5^0.

Найдем решение системы по формулам (2.7):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{200}{1} = 200; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{300}{1} = 300; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{200}{1} = 200.$$

Следовательно, решение системы имеет вид: (200; 300; 200).

3) для данной системы уравнений матрица системы $A=\begin{pmatrix}5 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}$,

матрицы-столбцы свободных членов $B=\begin{pmatrix}2700\\ 900\\ 1600\end{pmatrix}$ и неизвестных $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$.

Для нахождения решения по формуле (2.6), необходимо найти для матрицы A обратную. Выполним все четыре пункта алгоритма нахождения A^{-1}:

1. $|A|=\begin{vmatrix}5 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}=1;$

2. $A^T=\begin{pmatrix}5 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix};$

3. Найдем алгебраические дополнения для всех элементов A^T:

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=0 \qquad A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 2\end{vmatrix}=2 \qquad A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-1$$

$$A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1 \qquad A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}5 & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix}=-2 \qquad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}5 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}=3$$

$$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1 \qquad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-1 \qquad A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-1.$$

Итак, присоединенная матрица имеет вид: $\overline{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ -1 & -2 & 3\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

4. Вычислим обратную матрицу по формуле (1.5): $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot\overline{A}$:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ -1 & -2 & 3\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Следовательно, решение $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2700 \\ 900 \\ 1600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix}$.

Итак, $x_1 = 200;$ $x_2 = 300;$ $x_3 = 200$, или $(200; 300; 200)$.

4) заполним первую таблицу Гаусса (Т.1), используя коэффициенты при неизвестных системы и столбец свободных членов уравнений.

x_1	x_2	x_3	B	
5 2 3	3 [1] 2	4 1 2	2700 900 1600	Т.1
-1 2 -1	0 1 0	[1] 1 0	0 900 -200	Т.2
-1 3 [-1]	0 1 0	1 0 0	0 900 -200	Т.3
0 0 1	0 1 0	1 0 0	200 300 200	Т.4

Отсюда, восстановив систему по Т.4, получим:

$$\begin{cases} x_3 = 200 \\ x_2 = 300 \\ x_1 = 200 \end{cases} \text{ или } (200;\ 300;\ 200).$$

Итак, фабрика выпускает 200 пар сапог, 300 пар кроссовок и 200 пар ботинок.

Тема 3. Уравнение прямой на плоскости

Аналитическая геометрия – это раздел математики, изучающий геометрические объекты средствами алгебры. Основным методом аналитической геометрии является метод координат, который позволяет геометрические задачи сводить к алгебраическим. Считается, что система координат введена, если указан способ, позволяющий установить положение точки заданием чисел.

Декартова прямоугольная система координат на плоскости вводится следующим образом. Выберем масштаб для измерения длин отрезков. В данной плоскости проведем две взаимно перпендикулярные оси: горизонтальная *Ox* (ось абсцисс) и вертикальная *Oy* (ось ординат). Точка *O* пересечения координатных осей называется *началом координат*. *Декартовыми прямоугольными координатами* точки *M* на плоскости называются два числа, равные расстояниям, взятым с определенным знаком, от этой точки до осей соответственно *Oy* и *Ox*.

Расстояние ρ *между точками* $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ находится по формуле:

$$\rho = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \tag{3.1}$$

Деление отрезка в заданном отношении. Рассмотрим две различные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Если точка $M(x, y)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, считая от точки M_1 т.е. $\lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|}$, то ее координаты определяются формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \tag{3.2}$$

в частности, если точка $M(x, y)$ является серединой отрезка M_1M_2, т.е. λ=1, из (3.2) получим формулы деления отрезка пополам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}\,. \tag{3.3}$$

Уравнением линии на плоскости, относительно выбранной системы координат называется такое уравнение $F(x,\, y) = 0$, которому удовлетворяют координаты любой точки данной линии и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на этой линии.

Уравнения прямой на плоскости задаются алгебраическими уравнениями первой степени относительно декартовых координат:

1) Общее уравнение прямой:

$$Ax + By + C = 0, \text{ где } A^2 + B^2 \neq 0; \qquad (3.4)$$

2) Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, имеет вид:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}; \qquad (3.5)$$

Замечание. Если знаменатель одной из дробей в (3.5) равен нулю, то прямые параллельны осям координат и задаются уравнениями или $x = x_1$ или $y = y_1$.

3) Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b; \qquad (3.6)$$

4) Уравнение прямой, проходящей через заданную точку и имеющей данный угловой коэффициент:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \qquad (3.7)$$

Если две прямые заданы уравнениями: $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, то *тангенс угла φ между двумя прямыми* определяется по формуле:

$$tg\varphi = \pm\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|, \qquad (3.8)$$

где знак выбирается в зависимости от того, острый или тупой угол между прямыми нужно найти.

Необходимое и достаточное условие параллельности выражается равенством:

$$k_1 = k_2. \qquad (3.9)$$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямых выражается равенством: $k_1 \cdot k_2 = -1$ или

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \quad (3.10)$$

Расстояние d *от точки* $M_0(x_0, y_0)$ *до прямой* $Ax + By + C = 0$ можно определить по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (3.11)$$

Для нахождения *точки пересечения прямых* l_1 и l_2 необходимо решить систему уравнений, соответствующих уравнениям данных прямых.

Пример 3.1. Даны вершины *A* (–2; 3), *B* (1; 12), *C* (11; 6) треугольника *ABC*. Найти:

1) уравнение стороны *AB*;
2) длину стороны *AB*;
3) уравнение высоты, опущенной из вершины *C*;
4) длину этой высоты;
5) уравнение прямой, параллельной стороне *AB,* проходящей через вершину *C*;
6) площадь треугольника;
7) уравнение медианы, опущенной из вершины *C*;
8) точку пересечения высот;
9) внутренний угол треугольника *ABC*;
10) сделать чертеж.

Решение: 1) Для нахождения уравнения стороны *AB* воспользуемся уравнением прямой, проходящим через две точки. Подставим в (3.5) координаты точек *A* и *B*:

$$\frac{y-3}{12-3} = \frac{x-(-2)}{1-(-2)}; \qquad \frac{y-3}{9} = \frac{x+2}{3} \qquad \text{или} \qquad \frac{y-3}{3} = \frac{x+2}{1};$$

$y - 3 = 3x + 6$ или $3x - y + 9 = 0$ – получено общее уравнение прямой *AB*.

2) Длину стороны *AB* найдем по формуле расстояния между двумя точками. Подставим в **(**3.1**)** координаты точек $A(-2; 3)$ и $B(1; 12)$

$$d = |AB| = \sqrt{(1+2)^2 + (12-3)^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \text{ ед.}$$

3) Высота *CD*, проведенная к стороне *AB* перпендикулярна ей ($CD \perp AB$), и поэтому, чтобы воспользоваться условием перпендикулярности (3.10) запишем уравнение прямой *AB*: $3x - y + 9 = 0$ в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом (3.6) $y = 3x + 9$. Следовательно, $k_{AB} = 3$. Угловые коэффициенты k_{CD} и k_{AB} удовлетворяют условию (3.10), т.е.:

$$k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}},$$

следовательно, угловой коэффициент высоты *CD* будет равен $k_{CD} = -\frac{1}{3}$.

Напишем уравнение высоты *CD,* используя уравнение прямой, проходящей через заданную точку и имеющей данный угловой коэффициент: Подставляя в **(**3.7**)** координаты точки *C*(11; 6) и угловой коэффициент $k_{CD} = -\frac{1}{3}$ получим:

$$y - 6 = -\frac{1}{3}(x - 11), \quad 3y - 18 = -x + 11, \quad x + 3y - 18 - 11 = 0, \text{ или}$$

$x + 3y - 29 = 0$ – общее уравнение прямой *CD*.

4) Длину высоты *CD*, найдем как расстояние от точки *C*(11; 6) до прямой *AB*: $3x - y + 9 = 0$, используя формулу (3.11):

$$d = |CD| = \frac{|3 \cdot 11 - 1 \cdot 6 + 9|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{36}{\sqrt{10}} = \frac{36\sqrt{10}}{10} = \frac{18\sqrt{10}}{5}.$$

5) Уравнение прямой *CL*, параллельной стороне *AB,* проходящей через вершину *C* напишем, используя условие параллельности (3.9), т.е. $k_{CL} = k_{AB} = 3$. В уравнение (3.7) подставим координаты точки *C*(11; 6) и значение углового коэффициента $k_{CL} = 3$, получим: $y - 6 = 3(x - 11)$, или $y = 3x - 27$.

Итак, $3x - y - 27 = 0$ - общее уравнение прямой *CL*.

6) Площадь треугольника найдем по формуле:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{10} \cdot \frac{18\sqrt{10}}{5} = 54 \text{ ед}^2.$$

7) Для нахождения уравнения медианы *CM*, найдем координаты точки *M*. Точка *M* делит сторону *AB* пополам, тогда по формулам деления отрезка пополам (3.3) координаты точки *M* будут равны :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2} = -0{,}5, \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3+12}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5.$$

Уравнение медианы *CM* получим, подставив координаты точек *C*(11; 6) и *M*(-0,5; 7,5) в формулу (3.5):

$$\frac{y-6}{7{,}5-6} = \frac{x-11}{-0{,}5-11}; \qquad \frac{y-6}{1{,}5} = \frac{x-11}{-11{,}5}; \qquad \frac{y-6}{3} = \frac{x-11}{-23};$$

$$-23y + 138 = 3x - 33 \;\text{ или }\; 3x - 33 + 23y - 138 = 0$$

Итак: $3x + 23y - 171 = 0$ – общее уравнение медианы *CM*.

8) Для нахождения точки пересечения высот треугольника *ABC* необходимо найти уравнение еще одной высоты, например проведенной из вершины *A*, т.к. все три высоты пересекаются в одной точке. Найдем уравнение высоты *AF* аналогично тому, как находили уравнение высоты *CD* в пункте 3). Для этого напишем уравнение стороны *BC* по формуле (3.5), используя координаты точек *B*(1; 12) и *C*(11; 6), тогда

$$\frac{y-12}{6-12} = \frac{x-1}{11-1}; \qquad \frac{y-12}{-6} = \frac{x-1}{10}; \qquad \frac{y-12}{-3} = \frac{x-1}{5},$$

или $5(y-12) = -3(x-1)$, $y = -\frac{3}{5}(x-1) + 12$.

Следовательно, для прямой *BC* угловой коэффициент $k_{BC} = -\frac{3}{5}$. Угловой коэффициент прямой *AF* из условия (3.10) будет: $k_{AF} = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{1}{-\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$.

Подставляя в **(**3.7**)** координаты точки *A*(-2; 3**)** и угловой коэффициент $k_{AF} = \frac{5}{3}$,

получим уравнение высоты *AF*: $y - 3 = \frac{5}{3}(x+2)$; или

$$3y - 9 = 5x + 10; \qquad 5x + 10 - 3y + 9 = 0;$$

Итак, $5x - 3y + 19 = 0$ – общее уравнение высоты *AF*.

Решая систему уравнений, соответствующих прямым *CD* и *AF*, найдем точку пересечения высот:

$$+\begin{cases} x+3y-29=0 \\ 5x-3y+19=0 \end{cases},$$

$$6x-10=0, \qquad 6x=10, \quad x=\frac{5}{3}.$$

Подставим в первое уравнение системы и получим:

$$\frac{5}{3}+3y-29=0, \qquad 3y=29-\frac{5}{3}=\frac{87-5}{3}=\frac{82}{3}; \qquad y=\frac{82}{9}.$$

Итак, точка E пересечения высот имеет координаты $E\left(\frac{5}{3}; \frac{82}{9}\right)$

9) Для нахождения угла ABC используем формулу (3.8), где k_1 – угловой коэффициент прямой AB и k_2 - угловой коэффициент прямой BC, т.е.

$$k_1=k_{AB}=3, \qquad k_2=k_{BC}=-\frac{3}{5}=-0{,}6,$$

причем по рисунку видно, что этот угол φ меньше $\frac{\pi}{2}$, следовательно, $tg\varphi$ должен быть положительным.

Итак, $tg\varphi=\left|\frac{-0{,}6-3}{1-1{,}8}\right|=\left|\frac{-3{,}6}{-0{,}8}\right|=\frac{9}{2}=4{,}5$ или $\varphi=arctg\,4{,}5$.

10) Выполним чертеж в прямоугольной декартовой системе координат:

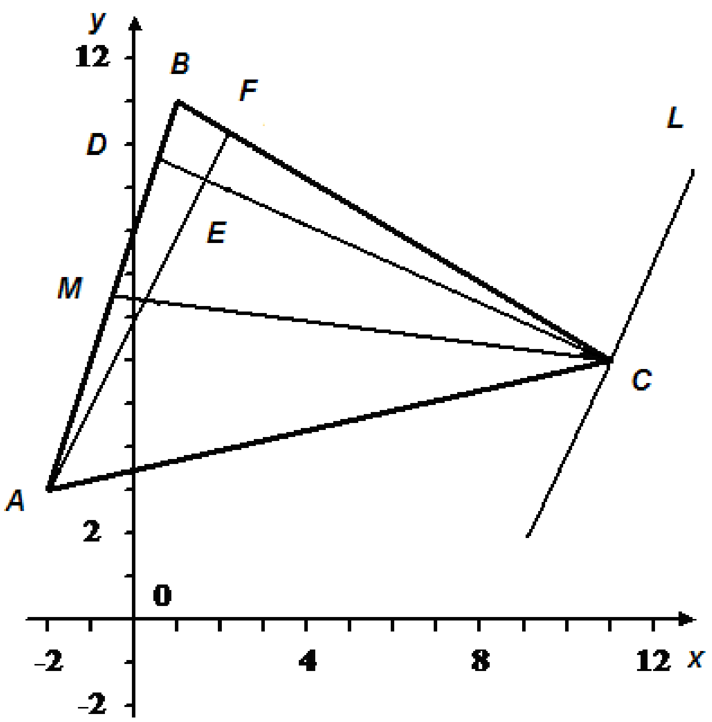

Рис. 3.1

Тема 4. Предел функции

Во многих разделах математики используется понятие *предела*, который обозначается $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ и означает следующее: предел функции $f(x)$ при стремлении x к x_0 равен A. Значения A и x_0 могут быть как конечными, так и бесконечными.

Свойства пределов.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, причем A и B конечны, то

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=A\pm B$;

$\lim\limits_{x\to x_0} c\,f(x)=c\,A$ при $c=const$;

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=A\cdot B$;

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$ при $B\neq 0$.

Понятие бесконечно больших и бесконечно малых функций.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, то функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при стремлении x к x_0.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$, то функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при стремлении x к x_0.

Функция, обратная бесконечно малой, является бесконечно большой, и наоборот, т.е.

если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{\alpha(x)}=\infty$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

Вычисление предела отношения двух бесконечно малых или двух бесконечно больших функций называется раскрытием неопределенности. Основным методом раскрытия неопределенностей является сокращение множителя, вызывающего неопределенность, а также используют два замечательных предела.

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ – первый замечательный предел.

$\lim\limits_{x\to x_0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ или $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$ – второй замечательный предел в двух различных формах. Иррациональное число $e\approx 2{,}72$ является основанием натуральных логарифмов.

Следствия:

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1+\dfrac{ax+в}{c}\right)^{\frac{c}{ax+в}}=e$ или б) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1+\dfrac{c}{ax+в}\right)^{\frac{ax+в}{c}}=e$

Пример 4.1. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+x-10}{2x^2+7x+6}$.

Решение. Подстановка предельного значения аргумента $x=-2$ приводит к неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ отношения двух бесконечно малых, необходимо предварительно разложить числитель и знаменатель на линейные множители, т.е. $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 $\boldsymbol{x_2}$ – корни квадратного трехчлена.

$$3x^2+x-10=0,\quad D=1+4\cdot 3\cdot 10=121=11^2,$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm 11}{6},\ \ x_1=-2,\ \ x_2=\frac{5}{3},$$

$$2x^2+7x+6=0,\ D=49-4\cdot 2\cdot 6=1,$$

$$x_{1,2}=\frac{-7\pm 1}{4},\ x_1=-2,\ x_2=-\frac{3}{2}.$$

Тогда, сокращая числитель и знаменатель на общий множитель, будем иметь:

$$\lim_{x\to -2}\frac{3x^2+x-10}{2x^2+7x+6}=\lim_{x\to -2}\frac{3(x+2)\left(x-\frac{5}{3}\right)}{2(x+2)\left(x+\frac{3}{2}\right)}=\lim_{x\to -2}\frac{3x-5}{2x+3}=\frac{3\cdot(-2)-5}{2\cdot(-2)+3}=\frac{-11}{-1}=11.$$

Следует заметить, что x только стремится к своему предельному значению -2, но не совпадает с ним. Следовательно, множитель, на который сокращается дробь $\boldsymbol{(x+2)}$, отличен от нуля.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+8}{4-2x-8x^2}$.

Решение. При $x \to \infty$ получаем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Чтобы найти предел дробной рациональной функции, необходимо разделить числитель и знаменатель дроби почленно на старший член числителя или знаменателя и применить основные теоремы о пределах:

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{8}{x^2}}{\frac{4}{x^2}-\frac{2x}{x^2}-\frac{8x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{5}{x}+\frac{8}{x^2}}{\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}-8} = -\frac{3}{8}.$$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$.

Решение. Подстановка предельного значения $x=0$ приводит к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, домножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю $(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-2x})$, и вынесем общий множитель в знаменателе:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x})(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-2x})}{x(x+1)(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-2x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+3x)-(1-2x)}{x(x+1)(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-2x})} = \lim_{x\to 0} \frac{1-3x-1+2x}{x(x+1)(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-2x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x(x+1)(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-2x})} = \frac{-1}{(0+1)(\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0})} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+3}{3n+2}\right)^{2n-1}$.

Решение. При подстановке в числитель и знаменатель выражения предельного значения получим неопределенность вида (1^{∞}). Раскроем эту неопределенность следующим образом. Выделим в числителе выражение такое же, как в знаменателе, и почленно разделим числитель на знаменатель:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+2+1}{3n+2}\right)^{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3n+2}\right)^{2n-1}.$$

Используя следствие б) 2-го замечательного предела и свойства степеней, можем записать предел следующим образом:

$$\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n+2}\right)^{\frac{3n+2}{1}}\right]^{\frac{1}{3n+2}(2n-1)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+2}}=e^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{e^2}.$$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}(3n+4)\left[ln(2n+1)-ln(2n+3)\right]=$

Решение. Используем свойства логарифмов и получим

$$=\lim_{n\to\infty}(3n+4)\,ln\frac{2n+1}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}ln\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{3n+4}=ln\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3-2}{2n+3}\right)^{3n+4}=$$

$$=ln\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2n+3}\right)^{3n+4}=ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2n+3}\right)^{\frac{2n+3}{-2}}\right]^{\frac{-2}{2n+3}\cdot(3n+4)}=$$

$$=ln\,e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+2}}=ln\,e^{-3}=-3ln\,e=-3.$$

6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-cos\,7x}{x\cdot cos\,3x}$.

Решение. Используя, известную из тригонометрии формулу $1-cos\,2x=2sin^2x$, имеем $1-cos\,7x=2\cdot sin^2\frac{7}{2}x$.

$$\lim_{x\to0}\frac{2\cdot sin^2\frac{7}{2}x}{x\cdot sin\,3x}=2\lim_{x\to0}\frac{2\cdot sin^2\frac{7}{2}x}{x\cdot sin\,3x}\cdot\frac{x}{x}=2\lim_{x\to0}\frac{x\cdot sin^2\frac{7}{2}x}{x^2\cdot sin\,3x}=$$

$$=2\left(\lim_{x\to0}\frac{sin\frac{7}{2}x}{x}\cdot\frac{\frac{7}{2}}{\frac{7}{2}}\right)^2\cdot\lim_{x\to0}\frac{3x}{3sin^3x}=2\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^2\left(\lim_{x\to0}\frac{sin\frac{7}{2}x}{\frac{7}{2}x}\right)^2\cdot\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{3x}{sin\,3x}=$$

$$=2\cdot\frac{49}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot(1)^2\cdot1=\frac{49}{6}.$$

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{sin^2 5x}{x\,tg\,2x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{sin^2 5x}{x\,tg\,2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{sin^2 5x}{x^2}\cdot\dfrac{x\cdot cos\,2x}{sin\,2x}=$

$$=\left(\lim_{x\to0}\frac{sin\,5x}{x}\cdot\frac{5}{5}\right)^2\cdot\lim_{x\to0}cos\,2x\cdot\lim_{x\to0}\frac{x}{sin\,2x}\cdot\frac{2}{2}=$$

$$=5^2\left(\lim_{x\to0}\frac{sin\,5x}{5x}\right)^2\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{2x}{sin\,2x}=25\cdot1^2\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot1=\frac{25}{2}.$$

Тема 5. Производная

Понятие производной возникло в результате решения таких задач, как задача о проведении касательной к кривой или о вычислении скорости неравномерного движения.

Пусть $y = f(x)$ есть непрерывная функция аргумента x, определённая на некотором интервале. Зададим аргументу x произвольное приращение (изменение) Δx такое, что $x + \Delta x$ также принадлежит этому интервалу. Функция получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$ (при условии, что этот предел существует).

Производную обозначают $y',\ f'(x),\ \dfrac{dy}{dx},\ \dfrac{df(x)}{dx}$.

Итак, по определению,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (5.1)$$

Если для некоторого значения x выполняется условие $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$, то говорят, что функция имеет бесконечную производную.

Если функция в точке x имеет конечную производную, то функция называется *дифференцируемой в* этой *точке*. Функция, дифференцируемая во всех точках интервала, называется *дифференцируемой на* этом *интервале.*

Нахождение производной функции называется *дифференцированием* функции.

Дифференциалом (*первого порядка*) функции $y = f(x)$ называется главная часть её приращения, линейная относительно приращения аргумента. Дифференциалом аргумента называется приращение аргумента: $dx = \Delta x$.

Дифференциал функции равен произведению её производной на дифференциал аргумента:

$$dx = y'dx. \qquad (5.2)$$

Производная сложной функции: если дана сложная функция $y = f(u)$, где $u = u(x)$ и функции $f(u)$ и $u(x)$ - дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции существует и равна производной данной функции по промежуточному аргументу *u*, умноженной на производную самого промежуточного аргумента по независимой переменной *x*, т.е.

$$y_x' = f_u' \cdot u_x'. \qquad (5.3)$$

Производная от функции в точке *x* есть функция от *x*, т.е. $f'(x)$ обозначает функцию, $f'(x_0)$ обозначает число - производную от функции в точке x_0. Если производная от $f'(x)$ существует, то она называется *второй производной* от $f(x)$ и обозначается $f''(x)$.

Подобным образом определяется *производная n-го порядка* $f^{(n)}(x)$, которая является производной от производной $(n-1)$- го порядка.

Геометрический смысл производной: производная $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент (тангенс угла наклона) касательной, проведённой к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, т.е. $tg\alpha = f'(x_0)$, где α-угол, образованный касательной с положительным направлением оси *Ox*.

Тогда уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 примет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (5.4)$$

Основные правила дифференцирования

Пусть даны функции $u = u(x),\ v = v(x)$ *и* $c = const$.

$$c' = 0 \qquad (5.5)$$

$$x' = 1 \qquad (5.6)$$

$$(c \cdot u)' = c \cdot u' \qquad (5.7)$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \qquad (5.8)$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv' \qquad (5.9)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad (5.10)$$

Основные формулы дифференцирования

	Производные основных элементарных функций	Производные сложных функций, $u=u(x)$ – произвольная функция
1	$c'=0, \qquad c=const$	
2	$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$	$\left(u^n\right)' = nu^{n-1}u'$
3	$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
4	$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\left(a^u\right)' = a^u \ln a\, u'$
5	$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(e^u\right)' = e^u u'$
6	$\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$
7	$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$	$\left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}$
8	$\left(\sin x\right)' = \cos x$	$\left(\sin u\right)' = u' \cos u$
9	$\left(\cos x\right)' = -\sin x$	$\left(\cos u\right)' = -u' \sin u$
10	$\left(tg\, x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left(tg\, u\right)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
11	$\left(ctg\, x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\left(ctg\, u\right)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
12	$\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
13	$\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
14	$\left(arctg\, x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\left(arctg\, u\right)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
15	$\left(arcctg\, x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$\left(arcctg\, u\right)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

Пример 5.1. Составить уравнение касательной к кривой $y = x^3 + x - 1$ в точке $x_0 = 2$.

Решение. В соответствии с формулой (5.3) уравнение касательной в точке $x_0 = 2$ примет вид $y = f(2) + f'(2)(x-2)$. Найдём производную функции, применяя правила дифференцирования,

$y' = \left(x^3 + x - 1\right)' = \left(x^3\right)' + x' - 1' = 3x^2 + 1.$ Вычислим значения функции и её производной в заданной точке $f(2) = 2^3 + 2 - 1 = 9$, $f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 1 = 13$. Уравнение касательной $y = 9 + 13(x-2)$ или $y = 13x - 17.$

Пример 5.2. Найти производные и дифференциалы заданных функций:

$а)\; y = \left(x^4 - \dfrac{2}{x\sqrt{x}} + 3\right)^5$, $\qquad в)\; y = \dfrac{1+2x^2}{2-x^3}$,

$б)\; y = tg^3\sqrt{x+2}$, $\qquad г)\; y = 3^{arcsin\sqrt{x}} + x\,ln\left(x^2+1\right)$.

Решение. $а)\; y = \left(x^4 - \dfrac{2}{x\sqrt{x}} + 3\right)^5 = \left(x^4 - 2x^{-\frac{3}{2}} + 3\right)^5$.

Сначала преобразуем функцию, затем дифференцируем, применяя формулу производной степенной функции $\left(u^n\right)' = nu^{n-1}u'$, где $u = x^4 - \dfrac{2}{x\sqrt{x}} + 3$, n=5.

$$y' = 5\left(x^4 - 2x^{-\frac{3}{2}} + 3\right)^4\left(x^4 - 2x^{-\frac{3}{2}} + 3\right)' = 5\left(x^4 - 2x^{-\frac{3}{2}} + 3\right)^4\left(4x^3 - 2\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}}\right) =$$

$$= 5\left(x^4 - \frac{2}{x\sqrt{x}} + 3\right)^4\left(4x^3 + \frac{3}{\sqrt{x^5}}\right).$$

$$dy = 5\left(x^4 - \frac{2}{x\sqrt{x}} + 3\right)^4\left(4x^3 + \frac{3}{\sqrt{x^5}}\right)dx.$$

$б)\; y = tg^3\sqrt{x+2}.$

Применим формулу из предыдущего примера, т.к. функция является степенной $y = u^3$, $u = tg\sqrt{x+2}$. При нахождении производной u' применяем формулу $(tgu)' = \dfrac{u'}{cos^2 u}$, где $u = \sqrt{x+2}$, которая так же является степенной функцией.

$$y' = 3tg^2\sqrt{x+1}\left(tg\sqrt{x+2}\right)' = 3tg^2\sqrt{x+1}\frac{1}{\cos^2\sqrt{x+2}}\left(\sqrt{x+2}\right)' =$$

$$= 3tg^2\sqrt{x+1}\frac{1}{cos^2\sqrt{x+2}}\frac{1}{2\sqrt{x+2}} = \frac{3tg^2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+2}\,cos^2\sqrt{x+2}}.$$

$$dy = \frac{3tg^2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+2}\,cos^2\sqrt{x+2}}dx.$$

в) $y = \dfrac{1+2x^2}{2-x^3}$. Дифференцируем как частное по формуле (4.9).

$$y' = \frac{\left(1+2x^2\right)'\left(2-x^3\right)-\left(1+2x^2\right)\left(2-x^3\right)'}{\left(2-x^3\right)^2} = \frac{4x\left(2-x^3\right)-\left(1+2x^2\right)\left(-3x^2\right)}{\left(2-x^3\right)^2} =$$

$$= \frac{8x-4x^4+3x^2+6x^4}{\left(2-x^3\right)^2} = \frac{2x^4+3x^2+8x}{\left(2-x^3\right)^2}.$$

$$dy = \frac{2x^4+3x^2+8x}{\left(2-x^3\right)^2}dx.$$

г) $y = 3^{arcsin\sqrt{x}} + x\,ln\left(x^2+1\right)$.

Применяем формулу производной показательной функции $\left(a^u\right)' = a^u\,ln\,a \cdot u'$, а для второго слагаемого формулу (5.8). Затем используем формулы $(arc\,sin\,u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ и $(ln\,u)' = \dfrac{u'}{u}$.

$$y'=\left(3^{arcsin\sqrt{x}}\right)'+\left(x\,ln\left(x^2+1\right)\right)'=3^{arcsin\sqrt{x}}\,ln3\,\left(arcsin\sqrt{x}\right)'+(x)'\,ln\left(x^2+1\right)+$$

$$+x\left(ln\left(x^2+1\right)\right)'=3^{arcsin\sqrt{x}}\,ln3\frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{\sqrt{1-x}}+ln\left(x^2+1\right)+x\frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}=$$

$$=3^{arcsin\sqrt{x}}\,ln3\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}+ln\left(x^2+1\right)+\frac{2x^2}{x^2+1}=3^{arcsin\sqrt{x}}\,\frac{ln3}{2\sqrt{x(1-x)}}+ln\left(x^2+1\right)+\frac{2x^2}{x^2+1}.$$

$$dy=\left(3^{arcsin\sqrt{x}}\,\frac{ln3}{2\sqrt{x(1-x)}}+ln\left(x^2+1\right)+\frac{2x^2}{x^2+1}\right)dx.$$

Тема 6. Функции нескольких переменных

Если каждой упорядоченной паре (x, y) из некоторого множества M по определенному правилу ставится в соответствие определенное число z принадлежащее множеству N, то говорят, что задана *функция двух переменных* $z = f(x, y)$.

При этом множество M называется *областью определения*, а N - *множеством значений функции*. Переменные x и y меняются независимо друг от друга.

Если независимых переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ n штук, имеем функцию n переменных

$$z = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Графиком функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек трехмерного пространства (x, y, z), аппликата z которых связана с абсциссой x и ординатой y функциональным соотношением $z = f(x, y)$.

График функции двух переменных $z = f(x, y)$, вообще говоря, представляет собой некоторую поверхность в трехмерном пространстве. Как правило, построение поверхности оказывается довольно трудной задачей и поверхность в пространстве обладает гораздо меньшей наглядностью, чем линия на плоскости. Поэтому в случае двух переменных для изучения поведения функции используют линии уровня.

Линией уровня функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек на плоскости Oxy, в которых функция сохраняет одно и тоже значение C.

Примерами линии уровня являются *изотермы* на картах синоптиков – линии уровня температуры, *изобары* – линии уровня давления. В экономическом анализе также используются линии уровня.

Любой функции $z = f(x, y)$ можно поставить в соответствие пару функций одной переменной: при фиксированном значении $x = x_0$ функцию $z = f(x_0, y)$ по переменной y; при фиксированном значении $y = y_0$ функцию $z = f(x, y_0)$ по переменной x.

Пусть $z = f(x, y)$ – функция двух переменных. Первая производная функции $z = f(x, y)$ по переменной x при фиксированной второй переменной y называется *первой частной производной функции по переменной* x, что символически записывается так: z'_x, или $f'_x(x, y)$, или $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

Аналогично определяется *первая частная производная функции* $f(x, y)$ *по переменной* y: z'_y, или $f'_y(x, y)$, или $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Из определения частных производных следует, что для нахождения частной производной $f'_x(x, y)$ надо считать постоянной переменную y, а для нахождения $f'_y(x, y)$ – переменную x. Вычисления частных производных выполняется по обычным правилам дифференцирования функций одной переменной, при этом значении всех переменных, кроме одной, по которой вычисляется производная, считаются постоянными.

Пример 6.1. Найти частные производные функции $z = x^3 - 3x^2 y + 4y^3$.

Решение. При вычислении частной производной по x следует переменную y считать постоянной, поэтому слагаемое $4y^3$ играет роль постоянной и его производная равна нулю, а в слагаемом $3x^2 y$ по свойству дифференцирования можно вынести постоянный множитель $3y$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6xy.$$

Аналогично, вычисляя частную производную функции по y, считаем постоянной переменную x:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x^2 + 12y^2.$$

Как видим из примера, частные производные сами являются функциями тех же переменных, от которых эти производные вычислялись. Как и в случае функции одной переменной, можно определить производные от производных, или производные высших порядков. Ограничимся частными производными второго порядка функции двух переменных.

Если частную производную z'_x продифференцировать по x, а частную производную z'_y продифференцировать по y, получим *частные производные второго порядка* «дважды» по x и «дважды» по y:

$$z''_{xx} = f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} f'_x(x,y),$$

$$z''_{yy} = f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} f'_y(x,y).$$

Если же частную производную z'_x продифференцировать по y, а частную производную z'_y продифференцировать по x, получим еще одну пару частных производных второго порядка, называемых *смешанными*:

$$z''_{xy} = f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f'_x(x,y),$$

$$z''_{yx} = f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f'_y(x,y).$$

Заметим, что написание нижних индексов соответствует порядку вычисления производных по различным переменным.

Пример 6.2. Найти частные производные второго порядка функции $z = (x^3y^2 + 8)^2$.

Решение. Найдем сначала частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x^3y^2 + 8)\cdot 3x^2y^2 = 6\left(x^5y^4 + 8x^2y^2\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2(x^3y^2 + 8)\cdot 3x^2y = 4\left(x^6y^3 + 8x^3y\right).$$

Для частных производных второго порядка имеем:

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[6(x^5y^4 + 8x^2y^2)\right] = 6\left(x^5y^4 + 8x^2y^2\right)'_x = 6\left(5x^4y^4 + 16xy^2\right),$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left[4(x^6y^3 + 8x^3y)\right] = 4\left(x^6y^3 + 8x^3y\right)'_y = 4\left(3x^6y^2 + 8x^3\right),$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left[6(x^5y^4 + 8x^2y^2)\right] = 6\left(x^5y^4 + 8x^2y^2\right)'_y = 6\left(5x^5y^3 + 16x^2y\right) =$$
$$= 24\left(x^5y^3 + 4x^2y\right),$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[4(x^6y^3 + 8x^3y)\right] = 4\left(x^6y^3 + 8x^3y\right)'_x = 4\left(6x^5y^3 + 24x^2y\right) =$$
$$= 24\left(x^5y^3 + 4x^2y\right).$$

Легко заметить, что выполняется равенство

$$z''_{xy} = z''_{yx} = 24\left(x^5y^3 + 4x^2y\right).$$

Равенство частных производных второго порядка, отличающихся порядком дифференцирования выполняется для достаточно широкого класса функций, к которым относятся многие функции, встречающиеся в экономике и бизнесе. Поэтому в общем случае:

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

Для функции двух переменных $z = f(x, y),$ как и для функции одной переменной, можно ввести понятие дифференциала функции, который определяется выражением

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

где дифференциалы независимых переменных принимаются равными приращениям $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Как и в случае функций одной переменой, дифференциал функции двух переменных приближено определяет величину изменения функции при малых изменениях независимых переменных:

$$\Delta z \approx z'_x dx + z'_y dy.$$

Пример 6.3. Найти дифференциал функции $z = \left(x^2 - 1\right)\left(y^3 + 2\right).$

Решение. Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x(y^3 + 2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2\left(x^2 - 1\right),$$

тогда дифференциал имеет вид

$$dz = 2x\left(y^3 + 3\right)dx + 3y^2\left(x^2 - 1\right)dy.$$

Упорядоченная пара частных производных первого порядка $\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ или $\left(f'_x(x,y), f'_y(x,y)\right)$ функции $z = f(x,y)$ двух переменных x и y обозначается $grad\, z$ или $grad\,(x,y)$ и называется *градиентом функции двух переменных* $z = f(x,y)$. Градиент функции двух переменных является двумерным вектором и в каждой точке (x_0, y_0) показывает направление самого быстрого роста функции $f(x,y)$.

Пример 6.4. Найти градиент функции $z = (x^2 - 1)(y^3 + 2)$ в точке $A(2,1)$.

Решение. Частные производные: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x(y^3 + 2)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2(x^2 - 1)$.

Градиент в общем виде имеет вид:

$$grad\, z = \left(2x(y^3 + 2);\ 3y^2(x^2 - 1)\right).$$

Чтобы найти градиент в точке $A(2,1)$ вычислим значения частичных производных в этой точке:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A = 2 \cdot 2(1+2) = 12,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A = 3(4-1) = 9.$$

тогда $grad\, z|_A = (12;\ 9)$.

Экстремум функции нескольких переменных

Как и в случае одной переменной, для функции $z = f(x,y)$ определяются *точки экстремума* (точки максимума и минимума).

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется *точкой максимума (минимума)* функции $z = f(x,y)$, если существует окрестность точки M_0, такая, что для всех точек (x,y)из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x_0, y_0) \geq f(x,y) \quad \left(f(x_0, y_0) \leq f(x,y)\right).$$

Следует обратить внимание на *локальный* характер экстремума (максимума и минимума) функции, так как речь идет о максимальном и минимальном значении лишь в достаточно малой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$.

Стационарные точки, то есть точки из области определения, в которых может быть экстремум функции, определяются *необходимым условием* экстремума: если *точка* $M_0(x_0, y_0)$ *есть точка экстремума дифференцируемой функции* $z = f(x, y)$, *тогда частные производные первого порядка в этой точке равны нулю*.

Из необходимого условия следует, что в точке экстремума дифференцируемой функции градиент равен нулю (нулевой вектор).

Будет ли стационарная точка, точкой экстремума проверяется на основании *достаточного условия экстремума функции двух переменных*: *пусть функция* $z = f(x, y)$ *определена в некоторой окрестности стационарной точки* $M_0(x_0, y_0)$, *в которой* $f'_x(x_0, y_0) = 0$ *и* $f'_y(x_0, y_0) = 0$; *имеет в этой точке непрерывные частные производные второго порядка* $f''_{xx}(x_0, y_0) = A$, $f''_{xy}(x_0, y_0) = B$, $f''_{yy}(x_0, y_0) = C$. *Тогда, если* $\Delta = AC - B^2 > 0$, *то в точке* $M_0(x_0, y_0)$ *функция* $z = f(x, y)$ *имеет экстремум, причем, если* $A < 0$ – *максимум, если* $A < 0$ – *минимум. В случае* $\Delta = AC - B^2 < 0$ *экстремума в точке* $M_0(x_0, y_0)$ *нет. Если* $\Delta = AC - B^2 = 0$, *то вопрос о наличии экстремума в точке остается открытым*.

Исследование функции двух переменных на экстремум рекомендуется:

1. Найти частные производные функции первого порядка z'_x и z'_y.
2. Составить систему уравнений $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$, решить ее и найти, таким образом, стационарные точки.
3. Найти частные производные второго порядка, вычислить их значение в каждой стационарной точке и с помощью достаточного условия сделать вывод о наличии экстремумов.
4. Найти экстремумы (экстремальные значения) функции.

Пример 6.5. Найти экстремумы функции $z = x^2 + xy + 2y^2 - x + y$.

Решение. Найдем частные производные первого порядка

$$z'_x = 2x + y - 1,$$

$$z'_y = x + 4y + 1.$$

1. Найдем стационарные точки из системы уравнений: $\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ x+4y+1=0 \end{cases}$;

$\begin{cases} y=1-2x \\ -7x+5=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\dfrac{5}{7} \\ y=-\dfrac{3}{7} \end{cases}$, точка $M_0\left(\dfrac{5}{7},-\dfrac{3}{7}\right)$ стационарная.

2. Находим частные производные второго порядка:

$$z''_{xx}=\left(2x+y-1\right)'_x=2,$$

$$z''_{yy}=\left(x+4y+1\right)'_y=4,$$

$$z''_{xy}=\left(2x+y-1\right)'_y=4.$$

Вычислим их значение в стационарной точке и найдем $A=2$, $B=1$, $C=4$. Составим $\Delta=AC-B^2=2\cdot 4-1=7>0$. На основании достаточного условия видим, что точка $M_0\left(\dfrac{5}{7},-\dfrac{3}{7}\right)$ является точкой минимума $\left(\Delta>0,\ A=2>0\right)$.

3. Находим $z_{\min}=z\left(\dfrac{5}{7};-\dfrac{3}{7}\right)=-\dfrac{4}{7}$.

Тема 7. Неопределенный интеграл

Основной задачей дифференциального исчисления является нахождение по данной функции ее производной. Рассмотрим обратную задачу: дана функция, требуется найти такую функцию, производная которой была бы равна данной.

Функция $F(x)$ называется *первообразной функции* $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если во всех точках этого отрезка выполняется равенство:

$F'(x)=f(x)$.

Пример 7.1. Функция $F(x)=\sin x$ первообразная для функции $f(x)=\cos x$ на промежутке $(-\infty;+\infty)$, так как в каждой точке этого интервала выполнено равенство $(\sin x)'=\cos x$.

Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то выражение $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом для функции $f(x)$, и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\int f(x)\cdot dx = f(x)\cdot dx.$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого C:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx, \text{ где } k\neq 0.$$

5. Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их интегралов:

$$\int\left(f(x)\pm g(x)\right)\cdot dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, ($n\neq -1$).

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

5. $\int e^x dx = e^x + C$.

11. $\int tg\, x\, dx = -\ln|\cos x| + C$.

12. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$ ($a\neq 0$).

13. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$ ($a\neq 0$).

6. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

7. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C$.

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C$.

10. $\int ctg\, x\,dx = \ln|\sin x| + C$.

14. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \;\; (a \neq 0)$.

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$.

16. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$.

17. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right| + C$.

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

Основные методы интегрирования

1. *Непосредственное интегрирование*

Интегрирование, которое можно произвести с помощью табличных интегралов (после преобразования подынтегральной функции, если это необходимо), будем называть *непосредственным интегрированием*.

Пример 7.1. Найти: а) $\int \frac{1+5x^2}{x^2 \cdot (1+x^2)}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^4 + x^2}dx$.

Решение.

$$\text{а)} \int \frac{1+5x^2}{x^2 \cdot (1+x^2)}dx = \int \frac{(1+x^2)+4x^2}{x^2 \cdot (1+x^2)}dx = \int \frac{1+x^2}{x^2 \cdot (1+x^2)}dx + \int \frac{4x^2}{x^2 \cdot (1+x^2)}dx =$$

$$= \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{4}{1+x^2}dx = \int x^{-2}dx + 4 \cdot \int \frac{1}{1+x^2}dx = -\frac{1}{x} + 4arctgx + C.$$

б) прибавляя и вычитая x^2 в числителе подынтегральной функции, получаем

$$\int \frac{dx}{x^4 + x^2} = \int \frac{x^2 + 1 - x^2}{x^2 \cdot (1+x^2)}dx = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \int x^{-2}dx - \int \frac{dx}{x^2 + 1} =$$

$$= -\frac{1}{x} - arctgx + C.$$

2. Метод подстановки (замены переменной)

Метод замены переменной в неопределенном интеграле является одним из самых эффективных методов интегрирования.

Пусть требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, который не является табличным. В этом случае в подынтегральном выражении нужно произвести замену переменной $x = \varphi(t)$, чтобы интеграл стал табличным или сводился к ним проще, чем первоначальный. Функция $\varphi(t)$ должна быть непрерывной, иметь непрерывную производную и обратную функцию. Так как $dx = \varphi'(t)dt$, то

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Замечание. При интегрировании функций иногда целесообразно сделать замену $t = \psi(x)$, а не $x=\varphi(t)$. Тогда $dt = \psi'(x)\,dx$.

Не существует общего «рецепта», следуя которому можно всегда понять, какую подстановку надо применить к данному интегралу, однако следует иметь ввиду полезные подсказки:

1) если под знаком интеграла стоит сложная функция $f(\varphi(x))$, как правило, используется подстановка $t = \varphi(t)$ (к примеру, если в подынтегральном выражении встречается функция e^{x^2}, то стоит попробовать подстановку $t = x^2$, а если $\sin\frac{1}{x}$, то $t = \frac{1}{x}$ и т. д.);

2) если в подынтегральном выражении есть готовый дифференциал функции $\varphi(t)$, т. е. выражение $\varphi'(x)dx$, то имеет смысл попробовать подстановку $t = \varphi(t)$.

Умение найти подходящую подстановку приходит по мере накопления опыта интегрирования. Рассмотрим ряд примеров.

Пример 7.2. Найти: а) $\int x^2 \cdot \sqrt[3]{3x^3 + 5}\, dx$; б) $\int e^x \cdot \cos\left(2e^x + 5\right) dx$;

в) $\int \frac{2^{\frac{1}{x}}\, dx}{x^2}$; г) $\int \frac{2^x\, dx}{\sqrt{4 - 4^x}}$.

Решение. а) $\int x^2 \cdot \sqrt[3]{3x^3+5}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = 3x^3+5 \\ dt = 9x^2dx \\ \frac{1}{9}dt = x^2dx \end{array} \right| = \frac{1}{9}\int t^{\frac{1}{3}}\,dt =$

$$= \frac{1}{12}\left(3x^3+5\right)^{\frac{4}{3}} + C = \frac{1}{12}\left(3x^3+5\right)\cdot\sqrt[3]{3x^3+5} + C.$$

б) $\int e^x \cdot \cos\left(2e^x+5\right)dx = \left| \begin{array}{l} t = 2e^x+5 \\ dt = 2e^xdx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \cos t\,dt = \frac{1}{2}\sin t + C =$

$$= \frac{1}{2}\sin\left(2e^x+5\right) + C.$$

в) $\int \frac{2^{\frac{1}{x}}dx}{x^2} = \left| \begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \\ dt = -\frac{dx}{x^2} \end{array} \right| = -\int 2^t\,dt = -\frac{2^t}{\ln 2} + C = -\frac{2^{\frac{1}{x}}}{\ln 2} + C.$

г) $\int \frac{2^x\,dx}{\sqrt{4-4^x}} = \int \frac{2^x\,dx}{\sqrt{4-\left(2^x\right)^2}} = \left| \begin{array}{l} t = 2^x \\ dt = 2^x \ln 2dx \end{array} \right| = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{dt}{\sqrt{2^2-t^2}} =$

$$= \frac{1}{\ln 2}\arcsin 2^{x-1} + C.$$

Интегрирование по частям

Пусть *u* = *u(x)* и *v* = *v(x)* – дифференцируемые функции от *x*. Тогда дифференциал их произведения равен

$$d\left(u\cdot v\right) = udv + vdu.$$

Проинтегрировав это выражение, получим $\int d\left(u\cdot v\right) = \int udv + \int vdu$ или $\int udv = u\cdot v - \int vdu$.

Формула $$\int udv = u\cdot v - \int vdu$$

выражает правило *интегрирования по частям.*

Пример 7.3. Найти:

а) $\int\left(x+1\right)\cdot\cos 2xdx$; в) $\int \sin\sqrt[3]{x}\,dx$;

б) $\int\left(x-2\right)\cdot e^{3x}dx$; г) $\int e^x\cos xdx$.

Решение. Применим метод интегрирования по частям.

а) $\int (x+1)\cdot\cos 2x dx = \begin{vmatrix} u = x+1, & dv = \cos 2x dx, \\ du = dx, & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{vmatrix} =$

$$= (x+1)\cdot\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = \frac{x+1}{2}\cdot\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

б) $\int (x-2)\cdot e^{3x}dx = \begin{vmatrix} u = x-2, & dv = e^{3x}dx, \\ du = dx, & v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{vmatrix} =$

$$= (x-2)\cdot\frac{1}{3}\cdot e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}(x-2)e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C.$$

в) Целесообразно ввести новую переменную $t = \sqrt[3]{x}$.

$$\int \sin\sqrt[3]{x}\,dx \begin{vmatrix} t = \sqrt[3]{x} \\ x = t^3 \\ dx = 3t^2 \end{vmatrix} = \int 3t^2\cdot\sin t\,dt = 3\int t^2\cdot\sin t\,dt = \begin{vmatrix} u = t^2, & dv = \sin t dt, \\ du = 2t dt, & v = -\cos t, \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot\left(-t^2\cdot\cos t + 2\int t\cos t dt\right) = -3t^2\cdot\cos t + 6\int t\cos t dt = \begin{vmatrix} u = t, & dv = \cos t dt, \\ du = dt, & v = \sin t, \end{vmatrix} =$$

$$= -3t^2\cdot\cos t + 6\cdot\left(t\sin t - \int \sin t dt\right) = -3t^2\cdot\cos t + 6t\sin t + 6\cos t + C =$$

$$= -3\sqrt[3]{x^2}\cdot\cos\sqrt[3]{x} + 6\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sin\sqrt[3]{x} + 6\cos\sqrt[3]{x} + C.$$

г) Обозначим $I = \int e^x\cos x dx$.

$$\int e^x\cos x dx = \begin{vmatrix} u = e^x, & dv = \cos x\,dx, \\ du = e^x dx, & v = \sin x \end{vmatrix} = e^x\cdot\sin x - \int e^x\cdot\sin x dx.$$

Последний интеграл берем также по частям

$$\int e^x\sin x dx = \begin{vmatrix} u = e^x, & dv = \sin x\,dx, \\ du = e^x dx, & v = -\cos x \end{vmatrix} = -e^x\cdot\cos x + \int e^x\cdot\cos x dx.$$

В результате получаем уравнение вида: $I = e^x\cdot\sin x - \left(-e^x\cdot\cos x + I\right)$. Решая его, окончательно будем иметь

$$I = \int e^x\cos x dx = \frac{1}{2}e^x\cdot(\sin x + \cos x) + C.$$

Тема 8. Определенный интеграл

Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a,b]$ и $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ – произвольное разбиение этого отрезка на n элементарных промежутков. Предположим, что в каждом отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ выбрана точка ξ_i. Тогда сумма

$$S = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, называется *интегральной суммой* для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$, а её предел при стремлении $\max_i \Delta x_i$ к нулю, если он существует и конечен, называется *определённым интегралом* от функции $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i. \qquad (8.1)$$

Определённый интеграл не должен зависеть от разбиений и выбора точек ξ_i.

Геометрический смысл определенного интеграла

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, где $f(x) \ge 0$ вычисляет точное значение площади криволинейной трапеции, ограниченной данной кривой, отрезком $[a,b]$ оси $0x$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, которые могут вырождаться в точки.

Если определённый интеграл существует, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a,b]$. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке и, если существует первообразная, то справедлива основная формула интегрального исчисления – формула *Ньютона-Лейбница*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (8.2)$$

где $F(x)$ – какая-нибудь первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Некоторые свойства определенного интеграла

1^0. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b k\, f(x)\, dx = k\int_a^b f(x)\, dx.$$

2^0. Определенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен сумме определенных интегралов от этих функций:

$$\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right) dx = \int_a^b f_1(x)\, dx \pm \int_a^b f_2(x)\, dx.$$

3^0. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx.$$

4^0 . Совершенно ясно, что если верхний или нижний пределы интегрирования совпадают, т. е., если $b = a$, то интеграл будет равен нулю:

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0.$$

5^0. Интеграл по отрезку равен сумме интегралов по его частям:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx, \text{ где } a < c < b.$$

Пример 8.1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\displaystyle\int_1^3 \frac{(x-1)^2}{x}\, dx$; б) $\displaystyle\int_0^2 \frac{8^x - 4^x}{4^x}\, dx$.

Решение:

а)

$$\int_1^3 \frac{(x-1)^2}{x}\, dx = \int_1^3 \frac{x^2 - 2x + 1}{x}\, dx = \int_1^3 \left(x - 2 + \frac{1}{x}\right) dx = \int_1^3 x\, dx - 2\int_1^3 dx + \int_1^3 \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\Bigg|_1^3 - 2x\Bigg|_1^3 + \ln x\Bigg|_1^3 = \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) - 2(3-1) + (\ln 3 - \ln 1) = 4 - 4 + \ln 3 = \ln 3.$$

б) $$\int_0^2 \frac{8^x - 4^x}{4^x}\, dx = \int_0^2 \left(\frac{8^x}{4^x} - 1\right) dx = \int_0^2 \left(2^x - 1\right) dx = \int_0^2 2^x\, dx = \int_0^2 dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Bigg|_0^2 - x\Bigg|_0^2 =$$

$$= \left(\frac{2^2}{\ln 2} - \frac{2^0}{\ln 2}\right) - (2 - 0) = \frac{4}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} - 2 = \frac{3}{\ln 2} - 2.$$

Замена переменной (метод подстановки) в определенном интеграле

При вычислении определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ способом замены переменной данный интеграл с помощью подстановки $x=\varphi(t)$ или $t=\psi(x)$ преобразуется в другой определенный интеграл с новой переменной интегрирования t, причем старые, нижний и верхний, пределы интегрирования $x_н=a$ и $x_в=b$ заменяются новыми пределами $t_н=\psi(a)$ и $t_в=\psi(b)$, т.е.: $\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_{t_н}^{t_в} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt$.

Здесь предполагается, что функции $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $t_н\le t\le t_в$, а функция $f\big(\varphi(t)\big)$ определена и непрерывна на этом отрезке.

Пример 8.2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^5 \dfrac{3\,dx}{\sqrt[4]{3x+1}}$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x+4}}\,dx$.

Решение:

$$а)\ \int\limits_0^5 \frac{3\,dx}{\sqrt[4]{3x+1}}=3\int\limits_0^5 \frac{dx}{\sqrt[4]{3x+1}}=\left|\begin{array}{l} t=3x+1 \\ dt=3\,dx \\ dx=\dfrac{1}{3}dt \\ t_н=1,\ t_в=16 \end{array}\right|=3\cdot\frac{1}{3}\int\limits_1^{16}\frac{dt}{\sqrt[4]{t}}=\int\limits_1^{16} t^{-\frac{1}{4}}dt=$$

$$=\frac{4}{3}t^{\frac{3}{4}}\Bigg|_1^{16}=\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{16^3}-\sqrt[4]{1^3}\right)=\frac{4}{3}(8-1)=\frac{28}{3}.$$

$$б)\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\sin x+4}}=\left|\begin{array}{l} t=\sin x+4 \\ dt=\cos x\,dx \\ t_н=4,\ t_в=5 \end{array}\right|=\int\limits_4^5\frac{dt}{\sqrt{t}}=\int\limits_4^5 t^{-\frac{1}{2}}dt=2t^{\frac{1}{2}}\Bigg|_4^5=2\sqrt{t}\Bigg|_4^5=$$

$$=2\left(\sqrt{5}-\sqrt{4}\right)=2\left(\sqrt{5}-2\right).$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле

Если функции $u(x)$, $v(x)$– дифференцируемые на отрезке $[a,b]$, то справедлива *формула интегрирования по частям в определенном интеграле*, которая имеет вид:

$$\int_a^b u\,d\,v = u\,v\,\Big|_a^b - \int_a^b v\,du\,. \qquad (8.3)$$

Пример 8.3. Вычислить определенный интеграл: $\int_0^{\pi} x\sin 2x\,d\,x$.

Решение:

$$\int_0^{\pi} x\sin 2x\,d\,x = \left|\begin{array}{ll} u = x & d\,u = d\,x \\ d\,v = \sin 2x\,d\,x & \\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x & \end{array}\right| = -\frac{1}{2}x\cos 2x\,\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2x\,d\,x =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\pi\cos 2\pi - 0\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\,x\,\Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\left(\sin 2\,\pi - \sin 0\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур

Пусть $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ – две непрерывные на $[a\,,b]$ функции. Кроме того, $f_2(x) \ge f_1(x)$ при любом $x \in [a,\,b]$. Тогда площадь фигуры, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, которые могут вырождаться в точку, и графиками функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)d\,x\,. \qquad (8.4)$$

Пример 8.4.

Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$.

Решение:

Найдем пересечения этих линий, решив систему $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x^2 \end{cases}$.

Получим: $(0,0)$ и $(1,1)$. Построим эти линии (см. рис. 8.1).

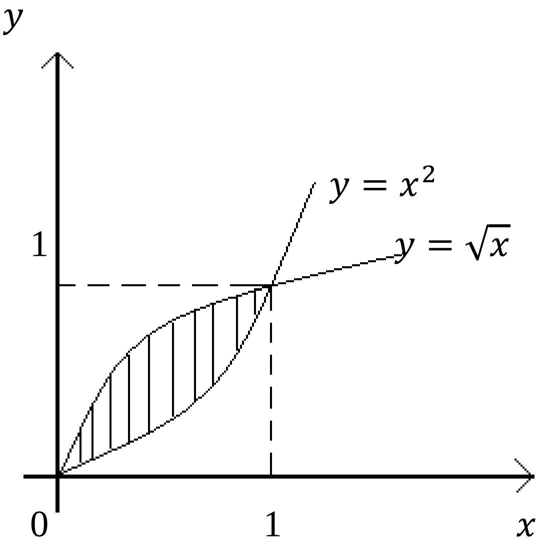

Рисунок 8.1.

Теперь по формуле (8.4) будем иметь:

$$S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) d\,x = \int_0^1 \sqrt{x}\, d\,x - \int_0^1 x^2\, d\,x = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^1 - \frac{1}{3} x^3 \Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Тема 9. Непосредственный подсчет вероятностей

Изучение закономерностей однородных массовых случайных явлений составляет предмет ***теории вероятностей*** и основанной на ней ***математической статистики***.

Изучение каждого явления в порядке наблюдения или проведения опыта связано с осуществлением некоторого комплекса условий или действий, в результате которого происходит определенное явление, называемое ***событием***. События, которые могут произойти, а могут не произойти в результате испытания называют ***случайными***, и обозначают заглавными буквами A, B, C и т.д.

Событие называется ***достоверным***, если оно обязательно должно произойти в результате испытания и ***невозможным***, если в результате испытания не может произойти.

События называются ***несовместными***, если в условиях испытания каждый раз возможно появление только одного из них, т.е. появление одного из событий исключает появление другого. В противном случае случайные события называются ***совместными***.

События A и $\overline{A}$ (не A) называются ***противоположными***, если в условиях испытания они несовместны и являются единственными его исходами.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют ***полную группу***, если они являются единственно возможными и несовместными исходами некоторого испытания.

События называются ***равновозможными***, если они имеют одинаковые шансы появиться в результате испытания.

Простые или ***элементарные*** события - это неразложимые равновозможные события и их появление обусловлено только одним исходом испытания.

Если события могут появиться в результате нескольких исходов испытания, то их называют ***сложными***.

Те исходы, при которых наступает событие A, называются ***благоприятствующими*** событию A.

Суммой *событий* A и B называется событие $A+B$, которому благоприятствуют все элементарные события, благоприятствующие хотя бы одному из событий A и B. Другими словами событие $A+B$ заключается в наступлении события A или события B, или обоих вместе.

Произведением *событий* A и B называется событие $A \cdot B$, которому благоприятствуют события, благоприятствующие обоим событиям A и B. Другими словами, событие $A \cdot B$ заключается в совместном появлении обоих событий и A и B.

Для решения практических задач нужна количественная оценка (мера) возможности появления или непоявления событий. Для определения этой меры ввели понятие вероятности события $P(A)$.

Относительной частотой $W(A)$ события A называется отношение числа M появлений события A к общему числу N испытаний, т.е. $W(A) = \dfrac{M}{N}$.

При больших N относительная частота обнаруживает свойство устойчивости, стабилизируется около некоторого числа, которое и принято считать ***статистической*** вероятностью события A, т.е. $P_{cm}(A) = \lim\limits_{N \to \infty} W(A)$.

Ясно, что применение этого определения на практике затруднительно, т.к. требует большого числа испытаний, поэтому, если возможно, то используют

классическое определение вероятности: $$P(A)=\frac{m}{n},\qquad(1.1)$$

где n – общее число равновозможных несовместных исходов испытания, а m – число исходов, благоприятствующих появлению события A.

Из этого определения вытекают следующие ***свойства***:

1^0. Вероятность любого события заключена в пределах от нуля до единицы, т.е $0\le P(A)\le 1$;

2^0. Вероятность достоверного события U равна единице: $P(U)=1$, поскольку оно обязательно происходит при испытании, следовательно, ему благоприятствуют все элементарные исходы, т.е. $m=n$;

3^0. Вероятность невозможного события V равна нулю: $P(V)=0$, т.к. оно не может произойти в результате испытания, т.е. ему не благоприятствует ни один из исходов и, следовательно $m=0$;

4^0. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т.е. $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Вероятность можно связать с процентами. Например, если известно, что $P(A)$= 0,7, то при достаточно большом числе испытаний, событие A появится примерно в 70% случаев.

Если вероятность близка к единице, то событие является часто происходящим. Если вероятность близка к нулю, то событие является редким.

Следует заметить, что, вычисляя вероятность по формуле (1.1) события A, которое является сложным, необходимо для подсчета общего числа n – равновозможных и несовместных исходов испытания и m– числа исходов, благоприятствующих появлению события A применять понятие *числа* ***сочетаний*** из n элементов по m. Подробнее с этим понятием можно ознакомиться в разделе ***комбинаторика***, который рассматривает решение задач на подсчет всех возможных различных комбинаций, составленных из конечного числа элементов по определенным правилам.

Определение. Любое подмножество из m элементов множества, содержащего n элементов, называется ***сочетанием***.

Число всех различных сочетаний из n элементов по m обозначается C_n^m и находится по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \qquad (1.2)$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$, причем $0! = 1$, для любого натурального n.

Из формулы (1.2) следует, что $C_n^1 = n$ и $C_n^{n-1} = n$.

В сочетаниях порядок выбора элементов не важен, т.е. сочетания, состоящие из одних и тех же элементов, но отобранных в разном порядке являются одинаковыми.

Пример 9.1. Данные о распределении работников складского мультимодального комплекса по должностям и полу приведены в таблице.

Должности	Женщины	Мужчины
Заведующий складом	2	1
Менеджера по складированию и дистрибуции	2	1
Кладовщик	2	1
Комплектовщик товара	12	9
Контролер-комплектовщик	5	5
Грузчик	-	6

1. Наудачу отобран один из работников. Найти вероятность того, что это:

а) мужчина (A_1);

б) контролер-комплектовщик (B_1);

в) женщина, комплектовщик товара (C_1).

2. На этом же предприятии решено создать группу из трех человек, ответственную за проведение мероприятия. Если людей отбирать случайным образом, то какова вероятность, что это будут:

а) все женщины (A_2);

б) две женщины и один мужчина (B_2);

в) одна женщина, работающая менеджером по складированию и дистрибуции, одна женщина комплектовщик товара и мужчина (C_2).

Решение:

1. События A_1, B_1 и C_1 – простые, т.к., появляются в результате одного исхода испытания, поэтому для подсчета вероятностей этих событий по формуле (1.1) будем иметь:

а) здесь n=46 – общее число работников, а m=23 – число мужчин среди них, следовательно $P(A_1)=\frac{23}{46}=\frac{1}{2}=0{,}5$;

б) общее число работников n=46, а m=10 – число контролеров-комплектовщиков, следовательно $P(B_1)=\frac{10}{46}=0{,}22$;

в) n=46, а m=12 – число женщин комплектовщиков товара, поэтому $P(C_1)=\frac{12}{46}=0{,}26$.

2. События A_2, B_2 и C_2 – сложные, т.к., появляются в результате трех исходов испытания, поэтому общее число n равновозможных несовместных исходов испытания и m – число исходов, благоприятствующих появлению событий, будем находить по формуле числа сочетаний (1.2):

а) из числа всех работников, которое равно 46, составляются различные комбинации по три человека, число таких комбинаций и есть n в формуле (1.1), т.е. $n=C_{46}^3=\frac{46!}{3!\cdot 43!}=\frac{44\cdot 45\cdot 46}{1\cdot 2\cdot 3}=22\cdot 15\cdot 46$. Общее число женщин на предприятии равно 23, следовательно $m=C_{23}^3=\frac{23!}{3!\cdot 20!}=\frac{21\cdot 22\cdot 23}{1\cdot 2\cdot 3}=7\cdot 11\cdot 23$. Теперь по формуле (1.1) будем иметь:

$P(A_2)=\frac{7\cdot 11\cdot 23}{22\cdot 15\cdot 46}=\frac{7}{2\cdot 15\cdot 2}=\frac{7}{60}=0{,}12$;

б) двух женщин отбирают из 23, работающих на предприятии, и одного мужчину из числа всех мужчин, которых на данном предприятии также 23, следовательно $P(B_2)=\frac{C_{23}^2\cdot C_{23}^1}{C_{46}^3}$, поскольку $C_{23}^2=\frac{23!}{2!\cdot 21!}=\frac{22\cdot 23}{2}=11\cdot 23$, а $C_{23}^1=23$, окончательно получим

$P(B_2)=\frac{11\cdot 23\cdot 23}{22\cdot 15\cdot 46}=\frac{23}{2\cdot 15\cdot 2}=\frac{23}{60}=0{,}38$;

в) здесь $P(C_2)=\dfrac{C_2^1\cdot C_{12}^1\cdot C_{23}^1}{C_{46}^3}=\dfrac{2\cdot 12\cdot 23}{22\cdot 15\cdot 46}=\dfrac{2}{11\cdot 5}=\dfrac{2}{55}=0{,}04$.

Тема 10. Случайные величины

Переменная величина, принимающая в результате испытания то или иное (но при этом только одно) возможное значения в зависимости от случая, называется ***случайной величиной*** (СВ).

Различают ***дискретные*** (ДСВ) и ***непрерывные*** (НСВ) случайные величины.

Значения дискретной случайной величины изолированы друг от друга, в то время как непрерывная случайная величина принимает любые значения из некоторого интервала.

СВ обозначаются заглавными буквами $X, Y, Z,\ldots$ Значения случайных величин обозначают соответственно буквами $x,\ y,\ z,\ldots$

Например, стрелок стреляет по мишени. Рассмотрим случайные величины:

X – число выбитых очков, и $У$ – отклонение от центра мишени.

Здесь X – ДСВ, принимающая одно из одиннадцати возможных значений: 0, 1, 2, 3, ..., 10.

$У$ – НСВ, принимающая значения в интервале $[0;+\infty)$.

Для задания СВ недостаточно перечислить все ее возможные значения или записать интервал возможных значений, необходимо также указать как часто эти значения встречаются.

Полную информацию о ДСВ дает ее ***закон распределения***. Для ДСВ, чаще всего, используют таблицу, где в верхней строке записывают в возрастающем порядке все возможные значения СВ, а в нижней строке – вероятности, с которыми эти значения встречаются:

x_i	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	p_n

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – значения случайной величины X, причем $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$; $p_i = P(X = x_i)$, т.е. p_i – вероятность того, что случайная величина X приняла значение x_i, $i = 1, 2,\ldots, n$.

Закон распределения дискретной случайной величины иначе называют ***рядом распределения***.

Если закон распределения дискретной случайной величины составлен правильно, то должно выполняться равенство: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

Для задания НСВ чаще всего применяют функцию плотности распределения $f(x)$, которая обладает следующими свойствами:

1°. $f(x) \geq 0$, т.е. кривая функции плотности расположена либо выше оси абсцисс, либо на ней.

2°. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, геометрически это означает, что площадь, ограниченная кривой плотности распределения $f(x)$ и осью абсцисс равна единице.

3°. Вероятность того, что значение НСВ заключено в интервале $[a; b]$, равна определенному интегралу от функции плотности на этом интервале, т.е. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx.$

Закон распределения содержит полную информацию о случайной величине, однако для практического использования эта полная информация часто не обязательна, достаточно знать некоторые ***числовые характеристики***, отражающие основные свойства распределения данной случайной величины.

К основным числовым характеристикам случайной величины *X* относятся *математическое ожидание M(X)*, *дисперсия D(X)* и *среднее квадратическое отклонение σ(X)*.

Математическое ожидание *M(X)* определяется формулой:

для ДСВ – $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n,$ (10.1)

для НСВ – $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx.$ (10.2)

Математическое ожидание характеризует центр распределения, около которого сосредоточены все возможные значения СВ, т.е. определяет среднее значение.

Дисперсией *D(X)* называется математическое ожидание квадратов отклонений случайной величины от ее математического ожидания, т.е.:

$$D(X) = M\left((X - M(X))^2\right). \qquad (10.3)$$

Если преобразовать правую часть формулы (10.3), используя свойства математического ожидания, то получим следующую формулу:

$$D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2, \qquad (3.4)$$

которую удобнее использовать при вычислении дисперсии. Здесь X^2 – случайная величина, значения которой равны квадратам значений самой случайной величины *X*, а соответствующие вероятности – те же самые.

Итак, для определения дисперсии можно использовать следующие формулы:

для ДСВ

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 \cdot p_i \qquad (10.5)$$

или

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \left(M(X)\right)^2 \qquad (10.6)$$

для НСВ

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - M(X)\right)^2 \cdot f(x)\,dx \qquad (10.7)$$

или

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - \left(M(X)\right)^2. \qquad (10.8)$$

Дисперсия вычисляет среднее значение квадратов отклонений $\left(X - M(X)\right)$, т.е. характеризует разброс значений случайной величины вокруг ее среднего значения, но измеряется в квадратных единицах измерения СВ. Использование квадратов в определении дисперсии является вынужденной мерой, т.к. если убрать символ квадрата, то при достаточно больших отклонениях положительные и отрицательные по знаку отклонения аннулируются и среднее отклонение окажется равным нулю. Чтобы компенсировать эту вынужденную меру, вводят среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, которое определяется по формуле:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\,. \qquad (10.9)$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, как и дисперсия $D(X)$, характеризует разброс значений случайной величины вокруг ее среднего значения, но измеряется в тех же единицах, в каких измеряется изучаемая случайная величина.

Пример 10.1. Дискретная случайная величина задана законом распределения. Найти числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Указать их смысловое значение.

X	2	4	5	6
p_i	0,3	0,1	0,2	0,4

Решение:

Проверим, что закон распределения задан правильно:

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = 0{,}3+0{,}4+0{,}2+0{,}1=1\,.$$

Найдем числовые характеристики.

Математическое ожидание вычислим по формуле (10.1):

$$M(X)=2\cdot 0{,}3+4\cdot 0{,}1+5\cdot 0{,}2+6\cdot 0{,}4=4{,}4\,.$$

Используя формулу (3.6), определим дисперсию $D(X)$:

$$D(X)=2^2\cdot 0{,}3+4^2\cdot 0{,}1+5^2\cdot 0{,}2+6^2\cdot 0{,}4-(4{,}4)^2=$$
$$=1{,}2+1{,}6+5+14{,}4-19{,}36=22{,}2-19{,}36=2{,}84\,.$$

Среднее квадратическое отклонение по формуле (10.9) равно:

$$\sigma(X)=\sqrt{2{,}84}\approx 1{,}685\,.$$

Итак, среднее значение ДСВ, определяемое $M(X)=4{,}4$. Разброс значений вокруг ее математического ожидания характеризуется $D(X)=2{,}84$ и $\sigma(X)=1{,}685$.

Для определения числовых характеристик НСВ в формулах (10.2), (10.7), (10.8) используется функция плотности распределения $f(x)$, которая задает закон распределения НСВ. Эти законы могут быть весьма разнообразными, но на практике в большинстве случаев встречаются законы определенных типов. Важнейшим из них является *нормальный закон распределения*, которому подчиняется большинство НСВ.

Тема 11. Нормальное распределение

Нормальный закон распределения случайной величины является самым распространенным видом распределения непрерывных случайных величин. Нормальному закону подчинены случайные ошибки всевозможных измерений, с ним приходится сталкиваться при анализе и прогнозировании различных явлений в технике, экономике, социологии и других областях знаний.

Говорят, что случайная величина X распределена ***нормально***, если ее функция плотности распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (11.1)$$

где a и σ – параметры распределения, а именно: $a=M(X)$ – математическое ожидание, или среднее значение, случайной величины X; $\sigma^2 = D(X)$ – её дисперсия; $\sigma = \sigma(X)$ – среднее квадратическое отклонение.

График функции (11.1) называется *нормальной кривой* и имеет колоколообразный, симметричный относительно прямой $x=a$ вид, представлен на рисунке 11.1.

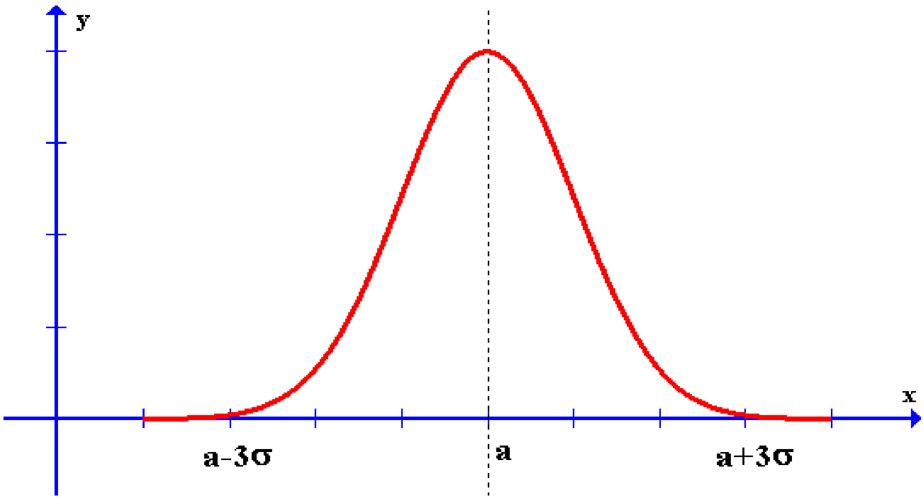

Рисунок 114.1

Как и для функции плотности любого вида, имеет место равенство: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, т.е. площадь, ограниченная нормальной кривой и осью абсцисс равна единице.

Если $a = 0$ а $\sigma = 1$, то функция (11.1) примет вид:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \qquad (11.2)$$

*Эта функция называется ***функцией Гаусса***. Для определения значений функции $\varphi(x)$ составлении таблица для неотрицательных значений аргумента $x \in [0;\ 4)$, которая приведена в приложении 1. При $x \geq 4$ значения функции принимают равными нулю, т.е. $\varphi(x)$=0 при любом $x \geq 4$. Для отрицательных значений аргумента x используют свойство четности: $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в интервал $(\alpha\,;\beta)$ вычисляется по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \qquad (11.3)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ – функция Лапласа.

Замечание. Поскольку вероятность отдельно взятого значения для НСВ равна нулю, то формула (4.3) может быть записана:

$$P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \leq X < \beta) = P(\alpha < X \leq \beta) = P(\alpha \leq X \leq \beta) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \qquad (11.4)$$

*Таблица значений функции $\Phi(x)$ для неотрицательных значений аргумента $x \in [0;\ 5]$ приведена в приложении 2. При $x > 5$ значения функции принимают равными 0,5, т.е. $\Phi(x)$=0,5 при любом $x > 5$. Для отрицательных значений аргумента x используют свойство нечетности функции Лапласа: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Вычислим вероятность того, что нормально распределенная СВ отклонится от своего математического ожидания не более чем на 3σ.

$$P(\alpha-3\sigma < X < \alpha+3\sigma) = \Phi\left(\frac{\alpha+3\sigma-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-3\sigma-a}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-3\sigma}{\sigma}\right) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\,\Phi(3) = 2\cdot 0{,}49865 = 0{,}9973\,.$$

Здесь значение $\Phi(3)$ =0,49865 найдено по таблице приложения 2. Поскольку эта вероятность близка к единице, то в статистике принято считать достоверным такое событие. Таким образом, имеет место так называемое *правило «трех сигм»*: отклонение СВ X от ее математического ожидания практически не превышает 3σ, т.е. практически достоверно, что все значения СВ, распределенной по нормальному закону, принадлежат интервалу $(a-3\sigma;\ a+3\sigma)$.

Пример 11.1. Функция плотности распределения вероятностей случайной величины X имеет вид: $f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-10)^2}{50}}$. Найти математическое ожидание $M(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, дисперсию $D(X)$ случайной величины X и вероятность ее попадания в интервал (4; 15)

Решение: Поскольку функция плотности задана, то сравнивая ее с общим видом (11.1) нормального закона распределения вероятностей, ясно, что параметрами этого закона являются: a = 10 и σ = 5, следовательно, $M(X) = a = 10$ – математическое ожидание; $\sigma(X) = \sigma = 5$ – среднее квадратическое отклонение; $D(X) = \sigma^2 = 25$ – дисперсия случайной величины X.

Чтобы найти вероятность попадания случайной величины в интервал (4;15), воспользуемся формулой (11.3) при a = 10, σ = 5, α = 4, β= 15. Получим:

$$P(4 < X < 15) = \Phi\left(\frac{15-10}{5}\right) - \Phi\left(\frac{4-10}{5}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1{,}2),$$

где $\Phi(1)$ = 0,3413; $\Phi(-1{,}2) = -\Phi(1{,}2) = -0{,}3849$ (см. приложение 2).

Окончательно получим:

$P(4 < X < 15) = 0{,}3413 - (-0{,}3849) = 0{,}7262 \approx 0{,}73$.

Пример 11.2. Прогнозированием величины банковской процентной ставки занимается большая группа аналитиков. Средний результат таких индивидуальных прогнозов представляет собой общий согласованный прогноз. Известно, что этот прогноз относительно величины банковской процентной ставки в текущем году подчиняется нормальному закону с математическим ожиданием $M(X)$=10,3 (%) и стандартным отклонением $\sigma(X)$=2,7 (%).

1. Из группы аналитиков случайным образом был отобран один человек. Найдите вероятность того, что согласно прогнозу этого аналитика уровень процентной ставки:

а) превысит 11,4%;

б) окажется менее 13%;

в) будет в пределах от 10 до 14%.

2. Определить количество аналитиков из 9 опрошенных, которые спрогнозируют процентную ставку в пределах от 10 до 14 %.

Решение:

По условию СВ X – величина банковской процентной ставки имеет нормальное распределение с параметрами $a = 10{,}3$ и σ=2,7.

1. вероятность того, что у случайно выбранного аналитика величина прогнозируемой процентной ставки:

а) превысит 11,4%, можно рассматривать как вероятность того, что значение, которое определит этот аналитик, будет заключено в интервале от 11,4 до $+\infty$. Используя формулу (4.3), получим:

$$P(X > 11{,}4) = P(11{,}4 < X < +\infty) = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{11{,}4 - 10{,}3}{2{,}7}\right) =$$

$= \Phi(+\infty) - \Phi(0{,}41) =$ 0,5–0,1591=0,3409,

поскольку $\Phi(+\infty) = 0{,}5$.

Замечание. Здесь, учитывая правило трех сигм, можно было $+\infty$ заменить на величину $a + 3\sigma$=10,3+3$\cdot$2,7=18,4, и найти по формуле (4.4)

$$P(X > 11{,}4) = P(11{,}4 < X \le 18{,}4) = \Phi\left(\frac{18{,}4 - 10{,}3}{2{,}7}\right) - \Phi\left(\frac{11{,}4 - 10{,}3}{2{,}7}\right) =$$

$= \Phi(3) - \Phi(0{,}41) =$ 0,4987–0,1591=0,3396.

Видно, что найденные значения вероятностей отличаются незначительно.

б) вероятность того, что у случайно выбранного аналитика прогноз будет менее 13% - это, то же самое, что вероятность того, что значение прогнозируемой банковской процентной ставки окажется в интервале от 0 до 13. Следовательно, по формуле (4.3), будем иметь:

$$P(X<13)=P(0<X<13)=\Phi\left(\frac{13-10,3}{2,7}\right)-\Phi\left(\frac{0-10,3}{2,7}\right)=$$

$$=\Phi(1)-\Phi(-3,81)=0,3413–(–0,4999)=0,3413+0,4999=0,8412.$$

в) вероятность того, что уровень процентной ставки будет в пределах от 10 до 14% найдем по формуле (4.4):

$$P(10\le X\le 14)=\Phi\left(\frac{14-10,3}{2,7}\right)-\Phi\left(\frac{10-10,3}{2,7}\right)=\Phi(1,37)-\Phi(-0,11)=$$

$$=0,4147+0,0438=0,4585.$$

2. для определения количество аналитиков из 9 опрошенных, которые спрогнозируют процентную ставку в пределах от 10 до 14 у.е. необходимо знать вероятность того, что процентная ставка будет в заданных пределах. Эта вероятность найдена в предыдущем пункте 1. в), которую можно трактовать следующим образом: 45,85% всех аналитиков прогнозируют уровень процентной ставки в пределах от 10 до 14% . Следовательно, из 9 человек этот процент составит: $0,4585\cdot 9=4,1\approx 4$ (человека).

Тема 12. Понятие о генеральной и выборочной совокупностях. Статистические оценки параметров распределения

Математическая статистика – это раздел математики, изучающий методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений с целью выявления существующих закономерностей. Установление этих закономерностей основано на изучении статистических данных. Для получения статистических данных проводят обследования или наблюдения за различными совокупностями однотипных объектов. Это могут быть, например, предприятия, люди, изделия и т.п. При этом каждый объект характеризуется некоторыми числами - величинами изучаемых признаков. Экономически невыгодно, а часто и практически невозможно, производить обследования всей совокупности, если по результатам наблюдений сравнительно небольшой ее части можно получить, с достаточной для практических целей достоверностью, необходимую информацию о всей совокупности. Такой метод исследования носит название ***выборочного***. Вся подлежащая изучению совокупность однотипных объектов называется ***генеральной совокупностью*** (г.с.). Та часть объектов из г.с., которая попала на проверку, исследование или изучение называется ***выборкой***. Число элементов в г.с. и в выборке называется их объемами.

Получив случайную выборку, и изучив ее, мы должны сделать выводы о числовых параметрах распределения г.с. или определить закон распределения, т.е. его параметры. Найти точные значения указанных параметров нет возможности, следовательно, необходимо найти подходящие статистические оценки этих величин, т.е. такие выборочные характеристики, которые бы позволили получить по возможности более точные их значения. Для этого необходимо по имеющейся выборке провести первичную обработку собранных статистических данных. Значения, которые принял в результате исследования или наблюдения интересующий нас признак называют ***вариантами***. Первичную обработку статистических данных проводят с помощью рабочих таблиц. Для заполнения таблицы необходимо расположить варианты в возрастающем или убывающем порядке. Эту операцию называют ***ранжированием***.

Вариационным рядом называется ранжированный ряд вариантов с соответствующими частотами n_i, причем $\sum n_i = n$ – есть объем выборки. В зависимости от объема выборки и от того, какие значения может принимать признак, вариационные ряды делятся на дискретные и непрерывные (интервальные).

Вариационный ряд называется ***дискретным***, если значения признака отличаются друг от друга на некоторую величину, и ***непрерывным***, если значения признака могут отличаться на сколь угодно малую величину.

В случае если изучаемый показатель принимает немного различных числовых значений, в частности для выборок малого ($n \le 30$) объема строят дискретный вариационный ряд (таблицу). В первом столбце таблицы, перечисляют все значения x_i признака в возрастающем порядке, во втором соответствующие частоты n_i. Если все значения признака встречаются по одному разу, т.е. все $n_i = 1$, то второй столбец можно опустить. Далее заполняют таблицу, в зависимости от того, какие формулы будут применяться для нахождения выборочных характеристик (*статистик*), а именно:

Выборочная средняя

Характеризует центр выборочного распределения и находится по формулам:

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i \,, \qquad (12.1)$$

где $к$ - число различных значений.

Если ввести понятие и обозначение ***относительной частоты***

$$w_i = \frac{n_i}{n} \,, \qquad (12.2)$$

то формула (5.1) примет вид:

$$\bar{x}_в = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot w_i \,. \qquad (12.3)$$

Иногда выборочная средняя плохо характеризует выборочную совокупность. Это происходит в тех случаях, когда колебания вариантов около нее достаточно велики. Для того чтобы оценить колеблемость изучаемого признака, используют различные показатели вариации. К числу основных таких показателей относятся: выборочная дисперсия, выборочное стандартное отклонение, выборочное исправленное стандартное отклонение, коэффициент вариации и др.

Выборочная дисперсия

Выборочная дисперсия показывает абсолютный разброс и вычисляется для выборок большого объема по одной из формул, в зависимости от формы представленной исходной информации:

$$D_в = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x}_в)^2 \cdot n_i \,, \qquad (12.4)$$

$$D_в = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_в)^2 \cdot w_i \,, \qquad (12.5)$$

$$D_в = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot n_i - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot n_i - (\bar{x}_в)^2 \,, \qquad (12.6)$$

$$D_в=\sum_{i=1}^{k}x_i^2\cdot w_i-\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\cdot w_i\right)^2=\sum_{i=1}^{k}x_i^2\cdot w_i-(\bar{x}_в)^2. \qquad (12.7)$$

Выборочное исправленное стандартное отклонение в квадрате

Эта выборочная характеристика (статистика) обозначается $S_в^2$, применяется для выборок малого объема, характеризует абсолютный разброс, как и дисперсия, но связана с дисперсией: $S_в^2=\frac{n}{n-1}D_в$, поэтому вычисляется по формуле:

$$S_в^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x}_в)^2\cdot n_i. \qquad (12.8)$$

Выборочное стандартное отклонение

$$\sigma_в=\sqrt{D_в}. \qquad (12.9)$$

Выборочное исправленное стандартное отклонение

$$S_в=\sqrt{S_в^2}. \qquad (12.10)$$

Интервальный (непрерывный) вариационный ряд строят для непрерывно варьирующего признака, а также для выборок большого $(n>30)$ объема, где в первом столбце таблицы записывают непересекающиеся интервалы. Первый и последний интервалы могут быть открытыми, т.е. иметь только одну границу. В процессе обработки данных открытые интервалы приходится условно закрывать. Для этого обычно, в случае интервалов разной длины, величину первого интервала принимают равной величине второго, а величину последнего – величине предпоследнего. В случае интервалов одинаковой длины, крайние интервалы принимают равными этой же величине. Во втором столбце таблицы записывают количество значений, попавших в каждый интервал. Далее осуществляют переход от интервального ряда к дискретному, заменяя интервалы их серединами $\tilde{x}_i=\frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ и записывают эти значения в следующем столбце таблицы.

Для вычисления выборочных характеристик применяют формулы указанные выше, в которых x_i заменяют на $\tilde{x}_i$.

Например, формула (12.1) для выборочной средней будет иметь вид:

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i \cdot n_i \,, \qquad (12.11)$$

формула (5.4) для выборочной дисперсии станет следующей:

$$D_в = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} (\tilde{x}_i - \bar{x}_в)^2 \cdot n_i \,. \qquad (12.12)$$

Для оценки относительного разброса значений относительно среднего значения $\bar{x}_в$ используют ***коэффициент вариации*** V**,** который измеряется в % и для выборок большого и малого объемов находится по формулам соответственно:

$$V = \frac{\sigma_в}{\bar{x}_в} \cdot 100\% \,. \qquad (12.13)$$

$$V = \frac{S_в}{\bar{x}_в} \cdot 100\% \,. \qquad (12.14)$$

Принято считать, что если коэффициент вариации V больше 35%, то изучаемая совокупность является неоднородной, и колеблемость признака высокая. Следовательно, использование выборочной средней для ее характеристики неверно, т.к. она не типична для изучаемой совокупности. В таком случае следует применять моду или медиану.

Модой вариационного ряда (обозначается M_0) называется то значение x_i, которому соответствует наибольшая частота n_i.

Медианой вариационного ряда (обозначается M_e) называется значение x_i, которое является серединой ранжированного вариационного ряда, т.е. половина вариантов имеют значения большие, чем медиана, а половина меньшие, чем медиана.

Все описанные выше выборочные характеристики носят названия *точечных* оценок, поскольку определяются одним числом (точкой).

Точечная оценка параметра генеральной совокупности, особенно при выборках малого объема, может существенно отличаться от оцениваемого параметра и приводить к грубым ошибкам. По этой причине используют ***интервальные оценки***.

Интервальная оценка неизвестного параметра распределения представляет собой ***доверительный интервал***, который с определенной (заданной) ***надежностью*** γ (***доверительной вероятностью***) накрывает неизвестный, оцениваемый параметр. С доверительной вероятностью связано такое понятие, как ***уровень значимости*** – α, а именно имеет место соотношение: $\alpha = 1 - \gamma$.

Границы доверительного интервала вычисляются по выборке.

Доверительный интервал для оценки генеральной средней $\overline{x}_г$ или, что одно и тоже, параметра a нормального распределения имеет вид:

$$\overline{x}_в - \Delta < a < \overline{x}_в + \Delta, \tag{12.15}$$

где $\overline{x}_в$ – среднее выборочное, а Δ – точность оценки.

Точность оценки Δ находится следующим образом:

а) для *малых* выборок ($n \le 30$)

$$\Delta = T(n,\gamma)\frac{S_в}{\sqrt{n}}, \tag{12.16}$$

где $T(n,\gamma)$ – коэффициент доверия, значения которого для выборки объема n и заданной надежности γ находятся по таблице (приложение 3).

б) для *больших* выборок ($n > 30$)

$$\Delta = t_\gamma \cdot \frac{\sigma_в}{\sqrt{n}}, \tag{12.17}$$

t_γ – коэффициент, значения которого для заданной надежности γ находятся по таблице значений функции Лапласа (приложение 2), а именно: t_γ является решением уравнения $\Phi(t_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$.

Графическое изображение вариационных рядов

Для изображения дискретных вариационных рядов служит ***полигон***. Для его построения в прямоугольной системе координат наносят точки с координатами $(x_i; n_i)$ или $(x_i; w_i)$, которые соединяют отрезками прямых. Полученная ломаная линия называется соответственно ***полигон частот*** или ***полигон относительных частот***.

Гистограмма служит для изображения интервального вариационного ряда. Для ее построения в прямоугольной системе координат по оси абсцисс откладывают отрезки, соответствующие интервалам варьирования, и на них, как на основаниях, строят прямоугольники с высотами равными или частотам n_i, или относительным частотам w_i, или плотностям относительных частот $\frac{w_i}{h}$, где h – длина интервала. Полученная фигура, состоящая из примыкающих друг к другу прямоугольников, называется соответственно: или ***гистограммой частот*** или ***гистограммой относительных частот*** или ***гистограммой плотностей относительных частот***.

Замечание. Если в интервальном вариационном ряде встречаются интервалы разной длины, то при построении гистограммы по оси ординат необходимо откладывать плотности относительных частот $\frac{w_i}{h}$, т.е. строить гистограмму плотностей относительных частот.

Судя по гистограмме или полигону можно сделать предположение о законе распределения изучаемого показателя. Например, если сгладить гистограмму плавной линией, и она будет похожа на колоколообразную линию, то можно предположить, что распределение близко к нормальному.

Замечание. При построении полигона или гистограммы можно выбирать разный масштаб на осях координат.

Пример 12.1. Имеются данные о проценте премий за каждый месяц истекшего года на коммерческом предприятии: 1; 3; 5; 4; 3; 5; 3; 2; 3; 4; 2; 4.

Необходимо по этим данным:

1) Построить дискретный вариационный ряд изучаемой случайной величины и представить его графически.

2) определить средний месячный процент премий за год, оценить абсолютный и относительный разброс.

3) Построить доверительный интервал, в котором с вероятностью γ =0,98 заключено значение среднего процента премий.

Решение:

1) В рассматриваемом примере имеется выборка малого объема: n =12. Для составления вариационного ряда выпишем из условия задачи значения изучаемой случайной величины в возрастающем порядке и укажем частоты n_i, с которыми каждое значение встретилось. Оформим расчеты в таблице 12.1. По данным первого и второго столбцов построим полигон частот (рис. 12.1).

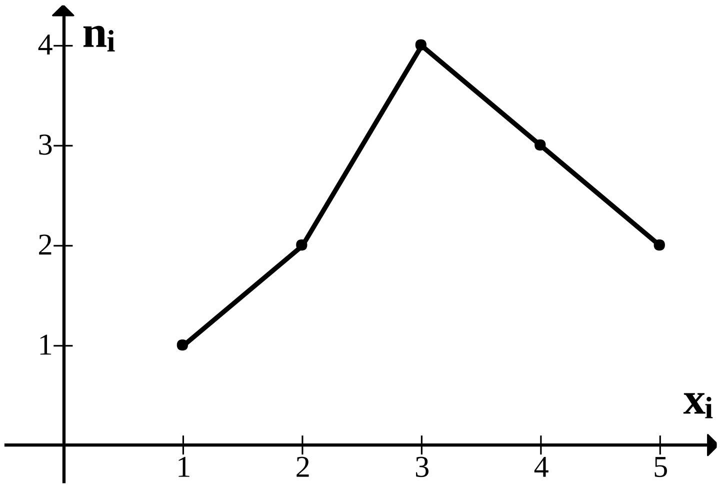

Рисунок 12.1

2) Средний месячный процент премий за год можно оценить выборочной средней для имеющихся данных, которую определим по формуле (12.1), используя сумму значений третьего столбца таблицы 12.1. Оценкой абсолютного разброса для выборок малого объема служит выборочное исправленное стандартное отклонение $S_в$, которое найдем, используя формулы (12.8) и (12.10).

Таблица 12.1

Значения показателя x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$(x_i - \bar{x}_в)^2 \cdot n_i$
1	1	1	5,063
2	2	4	3,125
3	4	12	0,25
4	3	12	1,688
5	2	10	6,125
$\sum$	**12**	**39**	**16,251**

Итак, средний месячный процент премий составит:

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i = \frac{1}{12} 39 = 3{,}25.$$

Выборочное исправленное стандартное отклонение равно:

$$S_в = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{5}\left(x_i - \bar{x}_в\right)^2 \cdot n_i} = \sqrt{\frac{1}{11}16{,}251} = \sqrt{1{,}477} \approx 1{,}22.$$

Для оценки относительного разброса значений относительно среднего значения $\bar{x}_в$ вычислим коэффициент вариации V по формуле (12.14). Итак, коэффициент вариации равен:

$$V = \frac{S_в}{\bar{x}_в} \cdot 100\% = \frac{1{,}22}{3{,}25} \cdot 100\% = 37{,}54\% .$$

Коэффициент вариации больше 35%, из чего можно сделать вывод, что изучаемая статистическая совокупность не является однородной, и колеблемость признака высока. Следовательно, выборочная средняя не типична для изучаемой совокупности. В качестве оценки среднемесячного процента премий следует выбрать либо моду: M_0=3 (чаще встречается $n_3 = 4$, см. таблицу 12.1), либо медиану M_e, которая также равна трем.

3) Доверительный интервал, в котором с вероятностью γ=0,98 заключен средний месячный процент премий найдем, используя формулы (5.15) и (5.16). Определим точность Δ интервальной оценки: $\Delta = T(n,\gamma)\frac{S_в}{\sqrt{n}} = 2{,}72\frac{1{,}22}{\sqrt{12}} = \frac{3{,}32}{3{,}46} = 0{,}96$, где коэффициент доверия $T(n,\gamma) = T(12,\ 0{,}98) = 2{,}72$ найден по таблице (приложение 3).

Найдем границы доверительного интервала. Левая: $\bar{x}_в - \Delta = 3{,}25 - 0{,}96 = 2{,}29$; правая: $\bar{x}_в + \Delta = 3{,}25 + 0{,}96 = 4{,}21$. Итак, с надежностью γ=0,98 можно утверждать, что значение среднего месячного процента премий принадлежит интервалу (2,29; 4,21).

Пример 12.2. Для анализа экономической эффективности работы торгового предприятия были собраны данные за три месяца о дневной выручке (у.е.), которые представлены в виде интервального вариационного ряда.

Выручка (у.е.)	менее 20	(20;30]	(30;40]	(40;50]	(50;60]	более 60
Число дней	6	15	24	28	14	4

По данным обследования необходимо:

1) Провести первичную обработку результатов, а именно: построить гистограмму частот; определить выборочные характеристики для дневной

выручки; оценить абсолютный и относительный разброс значений.

2) Полагая, что дневная выручка есть случайная величина, имеющая нормальное распределение, найти доверительный интервал, в котором с вероятностью γ=0,9524 заключено среднее значение дневной выручки.

Решение:

1) В рассматриваемом примере объем выборки n=91. Вся область наблюдаемых значений (дневная выручка) разбита на k=6 непересекающихся интервалов, причем крайние – открытые. Учитывая, что все интервалы равной длины h=10, первый и последний представим соответственно в виде (10;20] и (60;70]. Оформим расчеты в таблице 125.2. В первом столбце запишем частичные интервалы, во втором – частоты n_i из условия задачи.

Таблица 12.2

Интервалы по количеству верных ответов	n_i	$\tilde{x}_i$	$\tilde{x}_i \cdot n_i$	$(\tilde{x}_i - \bar{x}_в)^2 \cdot n_i$
(10;20]	6	15	90	3602,97
(20; 30]	15	25	375	3155,93
(30; 40]	24	35	840	487,08
(40; 50]	28	45	1260	845,46
(50; 60]	14	55	770	3361,33
(60; 70]	4	65	260	2599,98
$\sum$	**91**		**3595**	**14052,75**

Построим гистограмму частот (рис. 12.2). Для этого по оси абсцисс отложим интервалы, длиной h=10, в которые попадают наблюдаемые значения, а затем на этих интервалах, как на основаниях, построим прямоугольники, высоты которых равны соответствующим частотам n_i.

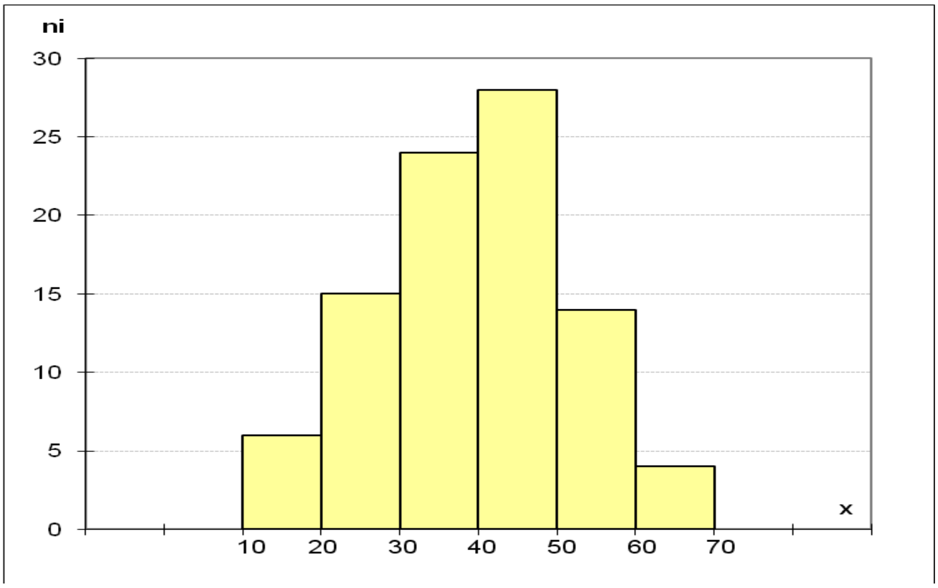

Рисунок 12.2

Для вычисления выборочных характеристик применим формулы (12.11) и (12.12). Результаты вычислений запишем в столбцах расчетной таблицы 12.2. В третьем столбце запишем середины интервалов. Суммируя результаты четвертого столбца, получим $\sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i \cdot n_i$. Разделив эту сумму на объем выборки найдем значение выборочной средней: $\bar{x}_в = \frac{1}{91} 3595 = 39{,}505$.

Сумму результатов последнего столбца, разделив на объем выборки, получим по формуле (12.12) значение выборочной дисперсии: $D_в = \frac{1}{91} 14052{,}75 = 154{,}43$. Тогда выборочное стандартное отклонение по формуле (12.9) будет равно: $\sigma_в = \sqrt{154{,}43} = 12{,}43$.

Коэффициент вариации определим по формуле (12.13), в результате получим: $V = \frac{12{,}43}{39{,}505} \cdot 100\% \approx 31{,}46\%.$

Коэффициент вариации находится в пределах 35%, следовательно, изучаемая статистическая совокупность является однородной, и колеблемость признака не высока. Использование выборочной средней для оценки дневной выручки оправдано.

2) Судя по гистограмме (рис. 12.2) можно сделать предположение, что дневная выручка есть случайная величина, имеющая распределение

близкое к нормальному. Чтобы найти доверительный интервал, в котором с вероятностью γ=0,9524 заключено значение средней дневной выручки, необходимо определить точность Δ интервальной оценки. Воспользуемся формулой (12.17) для выборок большого объема: $\Delta = t_\gamma \dfrac{\sigma_в}{\sqrt{n}}$, где t_γ – корень уравнения $\Phi(t_\gamma) = \dfrac{\gamma}{2}$. При заданной надежности интервальной оценки γ =0,9524 или $\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{0,9524}{2} = 0,4762$, получаем, что значение функции Лапласа $\Phi(t_\gamma) = 0,4762$, следовательно, ее аргумент по таблице значений функции Лапласа $\Phi(x)$ (см. приложение 2) должен быть равен t_γ=1,98. Итак, t_γ найдено, тогда $\Delta = 1,98 \cdot \dfrac{12,43}{\sqrt{91}} = 2,58$. Вычислим границы доверительного интервала. Левая: $\bar{x}_в - \Delta$=39,505–2,58=36,92; правая: $\bar{x}_в + \Delta$ =39,505+2,58=42,09. Доверительный интервал имеет вид (36,92; 42,09). Таким образом, среднее значение дневной выручки попадает в интервал (36,92; 42,09) с вероятностью 0,9524.

Тема 13. Элементы теории корреляции

В различных экономических задачах часто возникает необходимость обобщить полученную в процессе исследования информацию с целью построения аналитических зависимостей, пригодных для использования в имитационных и прогнозных моделях. Все процессы и явления, в той или иной степени взаимосвязаны друг с другом. Так, например, уровень производительности труда работников предприятия зависит от совершенства применяемого оборудования, степени совершенства технологии, организации производства труда и других различных факторов. С помощью статистических методов можно установить зависимость и дать ей количественную характеристику. Простейшей формой связи является ***линейная зависимость***. Далее будем рассматривать взаимосвязь двух признаков X и Y.

На практике для самых разнообразных явлений массового характера имеет место ***стохастическая*** зависимость, т.е. признаки X и Y связаны между собой, но эта взаимосвязь между переменными не однозначна, а подвержена случайным изменениям, т.е. при определенном значении признака X признак Y принимает заранее не предсказуемое значение. Это объясняется тем, что кроме признака X на изменчивость Y влияет много других, не учтенных связей.

Стохастическую зависимость можно изучать методами корреляционного и регрессионного анализа. ***Корреляционная зависимость*** определяет наличие и форму связи, тесноту этой связи, устанавливает и анализирует зависимость между значениями одной переменной, например X, и соответствующими ей среднегрупповыми $\bar{y}_x$ значениями другой. Для выяснения вида зависимости между x и $\bar{y}_x$ используют графическое изображение выборки, а именно: ***диаграмму рассеяния*** или ***корреляционное поле***. Диаграммой рассеяния называется совокупность n точек плоскости с координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, где $x_1, x_2, \dots, x_n$ – значения признака X, а $y_1, y_2, \dots, y_n$ – соответствующие значения признака Y. Построив диаграмму рассеяния, визуально определяют наличие и направление связи, величину разброса значений. Так же можно сделать предположение о виде корреляционной зависимости: линейной или нелинейной.

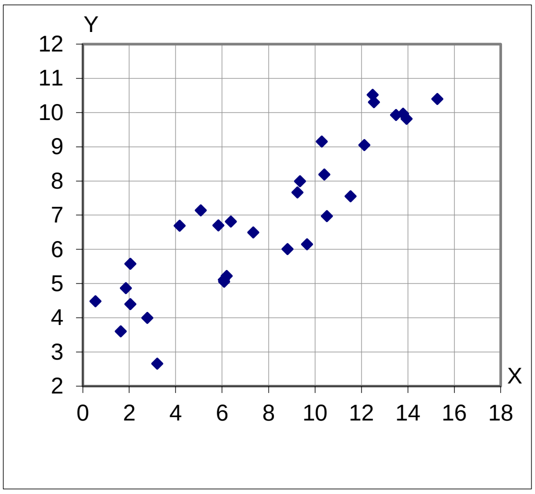

Рисунок 13.1а

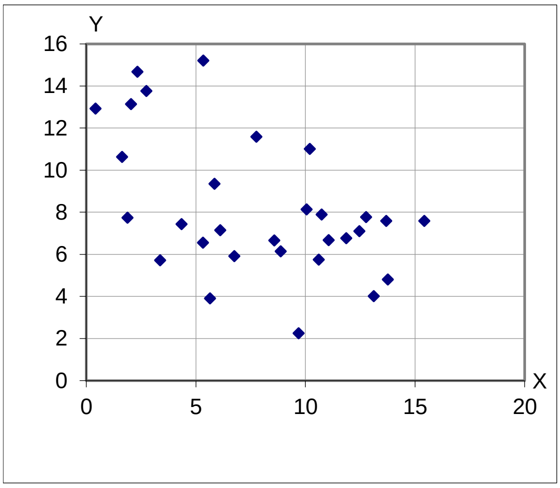

Рисунок 13.1б

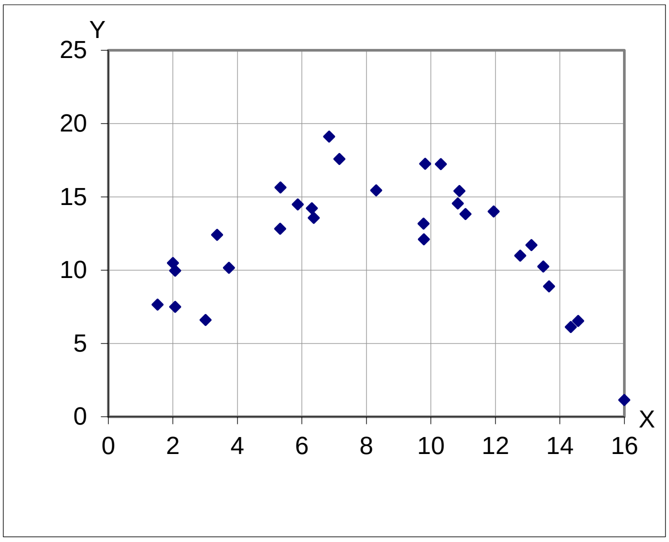

Рисунок 13.1в

Рисунок 13.1а иллюстрирует наличие тесной, положительно ориентированной линейной связи. На рисунке 13.1б показан случай, когда линейная связь менее тесная и отрицательно ориентирована. На рисунке 13.1в представлена диаграмма нелинейной связи между величинами X и Y.

Замечание. При построении диаграммы масштаб на осях координат следует выбирать так, чтобы размахи варьирования обоих переменных: $R_x = x_{\max} - x_{\min}$ и $R_y = y_{\max} - y_{\min}$ были приблизительно равными.

Если точки диаграммы рассеяния сосредоточены возле некоторой прямой, т.е. можно предположить, что корреляционная связь между признаками X и Y является линейной (рис.13.1а, б), то эту зависимость можно характеризовать ***функцией регрессии*** y по x вида:

$$\bar{y}_x = a_o + a_1 x, \qquad (13.1)$$

где a_o и a_1 – неизвестные коэффициенты такой зависимости.

Определение числовой оценки тесноты линейной корреляционной связи между признаками X и Y осуществляется при помощи так называемого ***выборочного коэффициента корреляции*** $r_в$.

Приступая к исследования, вначале изучается каждый признак X и Y в отдельности, а именно, находят соответствующие признакам X и Y средние выборочные $\bar{x}_в$ и $\bar{y}_в$ и выборочные стандартные отклонения $\bar{\sigma}_x$ и $\bar{\sigma}_y$ по формулам, которые выписаны в теме 12.

Если число выборочных данных невелико и частоты $n_i = 1$, то формула (12.1) для вычисления $\bar{x}_в$ может быть записана в виде:

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,, \qquad (13.1)$$

соответственно для вычисления $\bar{y}_в$ эта формула примет вид:

$$\bar{y}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \,. \qquad (13.2)$$

Для вычисления выборочных стандандартных отклонений, используя формулы (12.6) и (12.9) и, учитывая, что $n_i = 1$, получим:

$$\bar{\sigma}_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\bar{x}_в\right)^2} \,, \qquad (13.3)$$

$$\bar{\sigma}_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\bar{y}_в\right)^2} \,. \qquad (13.4)$$

Следующий этап статистического исследования – это установление зависимости между X и Y.

В общей постановке эта задача неразрешима, т.к. одному значению признака X может соответствовать целый спектр значений признака Y. Поэтому поставим более узкую задачу. Определим корреляционную зависимость между признаками X и Y, при которой происходит изменение среднего значения одного из признаков при изменении значений другого признака.

Пусть $\bar{y}_x$ – среднее значение признака Y, когда признак X принимает значение, равное x. Для нахождения линейной корреляционной зависимости между признаками X и Y вначале определяют уровень (тесноту) этой зависимости, т.е. вычисляют выборочный коэффициент корреляции $r_в$ по формуле:

$$r_в = \frac{1}{\bar{\sigma}_x \cdot \bar{\sigma}_y}\left(\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}\right), \qquad (13.5)$$

где $\overline{x \cdot y}$ – среднее значение произведений соответствующих выборочных значений признаков X и Y, т.е. при $n_i = 1$ имеем $\overline{x \cdot y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$, а произведение $\bar{x}\cdot\bar{y}$– есть произведение средних значений. Итак, формула (13.5) при $n_i = 1$ примет вид:

$$r_в = \frac{1}{\bar{\sigma}_x \cdot \bar{\sigma}_y}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) =$$

$$= \frac{1}{\bar{\sigma}_x \cdot \bar{\sigma}_y}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \bar{x}_в \cdot \bar{y}_в\right). \qquad (13.6)$$

Выборочный коэффициент корреляции является величиной безразмерной и его значение находится в пределах от -1 до $+1$, т.е. $|r_в| \le 1$ или $-1 \le r_в \le +1$.

Выборочный коэффициент корреляции характеризует линейную связь между признаками X и Y:

Если $|r_в|$ близок к 1, то эта связь тесная.

Если $|r_в|$ близок к 0, то эта связь слабая.

Если $r_в>0$, то говорят, что связь между признаками X и Y положительно ориентирована, т.е. $\bar{y}_x$, в основном, возрастает при возрастании x (рис. 13.1а).

Если $r_в< 0$, то говорят, что связь между признаками X и Y отрицательно ориентирована, т.е. $\bar{y}_x$, в основном, убывает при возрастании x (рис. 13.1б).

Пусть корреляционная зависимость между признаками X и Y является линейной, тогда уравнение регрессии $\bar{y}_x$, можно записать в виде:

$$\bar{y}_x = \bar{y}_в + r_в \cdot \frac{\bar{\sigma}_y}{\bar{\sigma}_x}\left(x - \bar{x}_в\right). \qquad (13.7)$$

Преобразовав это уравнение к виду 13.1, получим уравнение линейной корреляционной зависимости y по x.

Выборочное уравнение линейной регрессии используется при статистических исследованиях для вычисления предполагаемых средних значений одного из признаков, когда известно значение другого.

Для оценки степени пригодности рассчитанного уравнения функциональной зависимости в тех или иных практических целях нужно знать меру рассеяния эмпирических точек относительно линии, т.к. иногда это рассеяние настолько велико, что нет смысла использовать для прогноза полученное уравнение корреляционной связи. Погрешность такого прогноза может быть слишком велика.

В качестве меры достоверности уравнения регрессии используют ***среднюю квадратическую ошибку уравнения*** S_{xy}, представляющую собой среднее квадратическое отклонение эмпирических значений y_i и значений $\hat{y}_i$, рассчитанных по уравнению регрессии:

$$S_{xy} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2}{n-2}}\,. \qquad (13.8)$$

Значения $\hat{y}_i$ рассчитываются подстановкой признака x_i в полученное уравнение корреляционной связи.

Чем меньше рассеяние эмпирических точек вокруг прямой, тем меньше средняя квадратическая ошибка уравнения S_{xy}, т.е. она служит показателем значимости и полезности прямой, выражающей соотношение между изучаемыми признаками.

Пример 13.1. Для анализа зависимости X - объема импорта и Y - взыскание платежей в бюджет были собраны данные за девять отчетных периодов:

Объем импорта (у.е.)	61	53	55	58	62	65	58	52	63
Взыскание платежей (у.е.)	165	140	120	170	185	170	180	150	180

По имеющимся выборочным данным необходимо:

1) построить диаграмму рассеяния;

2) полагая, что между признаками X и Y имеет место линейная корреляционная зависимость определить выборочный коэффициент корреляции $r_в$, сделать вывод о направлении и тесноте этой связи;

3) найти выборочное уравнение линейной регрессии. Используя полученное уравнение, оценить ожидаемое среднее значение взысканий платежей в бюджет (признак Y), когда объем импорта (признак X) составит значение x_0=56 (у.е.);

4) построить линию регрессии на том же рисунке, на котором построена диаграмма рассеяния.

Решение:

1) Построим диаграмму рассеяния, чтобы визуально определить

наличие связи между X и Y, используя данные из условия задачи.

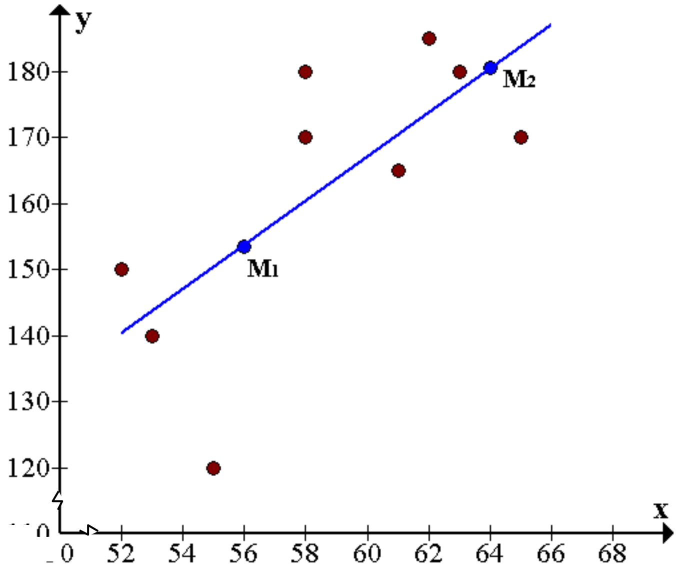

Рисунок 13.2

2) По направлению точек на диаграмме рассеяния (рисунок 13.2) видно, что с возрастанием значений X значения Y также возрастают. Следовательно, можно говорить о наличии прямо пропорциональной (возрастающей) линейной корреляционной зависимости.

Для облегчения расчетов построим вспомогательную таблицу 13.1.

Таблица 13.1

	X	Y	X^2	Y^2	$X \cdot Y$
	61	165	3721	27225	10065
	53	140	2809	19600	7420
	55	120	3025	14400	6600
	58	170	3364	28900	9860
	62	185	3844	34225	11470
	65	170	4225	28900	11050
	58	180	3364	32400	10440

	52	150	2704	22500	7800
	63	180	3969	32400	11340
$\sum$	**527**	**1460**	**31025**	**240550**	**86045**

Определим выборочный коэффициент корреляции $r_в$ по формуле (13.6). Вычислим выборочные характеристики для признаков X и Y, используя формулы (13.1-13.4):

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{9}527 = 58{,}56;$$

$$\bar{y}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{9}1460 = 162{,}22;$$

$$\bar{\sigma}_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x}_в)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}31025 - (58{,}56)^2} = \sqrt{3447{,}22 - 3429{,}27} =$$

$$= \sqrt{17{,}95} = 4{,}24;$$

$$\bar{\sigma}_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (\bar{y}_в)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}240550 - (162{,}22)^2} = \sqrt{26727{,}78 - 26315{,}33} =$$

$$= \sqrt{412{,}45} = 20{,}53.$$

Вычислим выборочный коэффициент корреляции по формуле (13.6):

$$r_в = \frac{1}{\bar{\sigma}_x \cdot \bar{\sigma}_y}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \bar{x}_в \cdot \bar{y}_в\right) = \frac{1}{4{,}24 \cdot 20{,}53}\left(\frac{1}{9}86045 - 58{,}56 \cdot 162{,}22\right) =$$

$$= \frac{1}{87{,}05}(9560{,}56 - 9499{,}6) = 0{,}7.$$

Выборочный коэффициент корреляции положителен, следовательно, между признаками X и Y имеет место положительно ориентированная линейная корреляционная зависимость.

3) Найдем выборочное уравнение линейной регрессии, используя формулу (13.7).

$$\bar{y}_x = 162{,}22 + 0{,}7 \cdot \frac{20{,}53}{4{,}24}(x - 58{,}56) = 162{,}22 + 3{,}39(x - 58{,}59) =$$

$$= 162{,}22 + 3{,}39\,x - 198{,}62 = 3{,}39\,x - 36{,}4.$$

Итак, уравнение линейной регрессии имеет вид:

$$\bar{y}_x = 3{,}39\,x - 36{,}4.$$

Используя полученное уравнение, оценим ожидаемое среднее значение признака Y – взыскание платежей в бюджет, когда признак X – объем импорта примет значение, равное 56, т.е. x_0=56 (у.е.) – точка, в которой рассчитывается прогноз.

Подставим в полученное уравнение регрессии $x = 56$. Получим $\bar{y}_x = 3{,}39 \cdot 56 - 36{,}4 = 189{,}84 - 36{,}4 \approx 153{,}4$.

Итак, следует ожидать значение взысканий платежей в бюджет на уровне 153,4 (у.е.), если объем импорта составит 56 (у.е.);

4) Построим прямую линию регрессии $\bar{y}_x = 3{,}39x - 36{,}4$ на рисунке 13.2. Для этого определим координаты двух любых точек этой прямой, например: при $x_1 = 56$ $\bar{y}_x = 153{,}4$, т.е. $M_1(56;\ 153{,}4)$;

при $x_2 = 64$ $\bar{y}_x = 180{,}6$, т.е. $M_2(64;180{,}6)$.

Проведем прямую через точки M_1 и M_2, которая и будет линией регрессии y по x.

Пример 13.2. Имеются данные за восемь отчетных периодов о соответствующих значениях текучести кадров (признак X) на выпуск качественной продукции (признак Y):

Текучесть кадров X (%)	0,3	0,5	0,9	0,7	0,4	0,2	0,5	0,7
Выпуск качественной продукции Y (%)	90	89	78	85	89	95	85	79

Необходимо:

1) построить диаграмму рассеяния;

2) полагая, что между признаками X и Y имеет место линейная корреляционная зависимость определить выборочный коэффициент корреляции $r_в$, сделать вывод о направлении и тесноте этой связи;

3) найти выборочное уравнение линейной регрессии. Используя полученное уравнение, оценить ожидаемое среднее значение признака Y, когда признак X примет значение x_0=0,6 (%);

4) построить линию регрессии на том же рисунке, на котором построена диаграмма рассеяния.

Решение:

1) Построим диаграмму рассеяния, используя данные из условия задачи (рисунок 13.3).

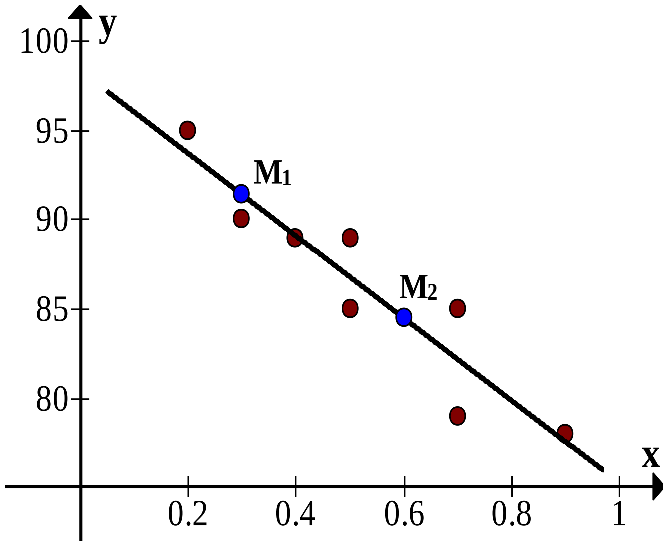

Рисунок 13.3

2) По расположению точек на диаграмме, можно говорить о наличии убывающей линейной корреляционной зависимости.

Определим выборочный коэффициент корреляции $r_в$ по формуле (13.6). Для этого составим расчетную таблицу 13.2 и найдем суммы по всем ее столбцам.

Таблица 13.2

	X	Y	X^2	Y^2	$X \cdot Y$
	0,3	90	0,09	8100	27,0
	0,5	89	0,25	7921	44,5
	0,9	78	0,81	6084	70,2
	0,7	85	0,49	7225	59,5
	0,4	89	0,16	7921	35,6
	0,2	95	0,04	9025	19,0
	0,5	85	0,25	7225	42,5
	0,7	79	0,49	6241	55,3
$\sum$	**4,2**	**690**	**2,58**	**59742**	**353,6**

Вычислим выборочные характеристики для признаков X и Y, используя формулы 13.1-13.4:

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{8}4{,}2 = 0{,}525;$$

$$\bar{y}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{8}690 = 86{,}25;$$

$$\bar{\sigma}_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\bar{x}_в\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{8}2{,}58 - (0{,}525)^2} = \sqrt{0{,}3225 - 0{,}2756} =$$

$$= \sqrt{0{,}0469} = 0{,}2166;$$

$$\bar{\sigma}_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\bar{y}_в\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{8}59742 - (86{,}25)^2} = \sqrt{7467{,}75 - 7439{,}063} =$$

$$= \sqrt{28{,}687} = 5{,}356.$$

Вычислим выборочный коэффициент корреляции по формуле (6.6):

$$r_в = \frac{1}{\bar{\sigma}_x \cdot \bar{\sigma}_y}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \bar{x}_в \cdot \bar{y}_в\right) = \frac{1}{0{,}2166 \cdot 5{,}356}\left(\frac{1}{8}353{,}6 - 0{,}525 \cdot 86{,}25\right) =$$

$$= \frac{1}{1{,}16}\left(44{,}2 - 45{,}281\right) = -0{,}93.$$

Выборочный коэффициент корреляции отрицателен и близок к –1. Следовательно, между признаками X и Y имеет место тесная отрицательно ориентированная линейная корреляционная зависимость.

3) Найдем выборочное уравнение линейной регрессии, используя формулу (13.7).

$$\bar{y}_x = 86{,}25 - 0{,}93 \cdot \frac{5{,}356}{0{,}2166}\left(x - 0{,}525\right) = 86{,}25 - 22{,}997(x - 0{,}525) =$$

$$= 86{,}25 - 22{,}997\,x + 12{,}073 = -22{,}997\,x + 98{,}323.$$

Итак, уравнение линейной регрессии имеет вид:

$$\bar{y}_x = -22{,}997\,x + 98{,}323.$$

Используя полученное уравнение, оценим ожидаемое среднее значение признака Y, когда признак X примет значение, равное 0,6 (%), т.е. подставим в полученное уравнение регрессии $x = 0{,}6$. Получим $\bar{y}_x = -22{,}997 \cdot 0{,}6 + 98{,}323 = -13{,}798 + 98{,}323 \approx 84{,}5$.

Следовательно, ожидаемое среднее значение качественной продукции равно 84,4 (%), если текучесть кадров будет на уровне 0,6 (%).

4) Построим прямую линию регрессии на рисунке 13.3. Для этого

определим координаты двух любых точек этой прямой, например:

при $x_1 = 0{,}3 \qquad \bar{y}_x = 91{,}4$, т.е. $M_1(0{,}3;\ 91{,}4)$;

при $x_2 = 0{,}6 \qquad \bar{y}_x = 84{,}4$, т.е. $M_2(0{,}6; 84{,}5)$.

Проведем прямую через точки M_1 и M_2, которая и будет линией регрессии y по x.

Задания для контрольной работы № 1

Задание 1. Найти несколько базисных решений СЛУ.

В.1 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 5 \end{cases}.$

В.2 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 - 4x_2 + 4x_3 - x_4 = 4 \end{cases}.$

В.3 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_4 = -3 \end{cases}.$

В.4 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}.$

В.5 $\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}.$

В.6 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_4 = 2 \end{cases}.$

В.7 $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -5 \end{cases}.$

В.8 $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 4 \end{cases}.$

В.9 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -1 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 7 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -8 \end{cases}.$

В.10 $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -4 \end{cases}.$

Задание 2. Даны вершины треугольника.

1) Сделать чертеж.

Найти:

2) уравнение стороны *AB*;

3) длину стороны *AB*;

4) уравнение высоты, опущенной из вершины *C*;

5) длину этой высоты;

6) уравнение прямой, параллельной стороне *AB,* проходящей через вершину *C*;

7) площадь треугольника;

8) уравнение медианы, опущенной из вершины *C*;

9) точку пересечения высот;

10) внутренний угол треугольника *ABC*;

Варианты

1.	A(- 3; - 2),	B(0; 10),	C(6; 2).
2.	A(1; 1),	B(4; 13),	C(10; 5).
3.	A(0; 3),	B(3; 15),	C(9; 7).
4.	A(- 2; 0),	B(1; 12),	C(7; 4).
5.	A(2; - 1),	B(5; 11),	C(11; 3).
6.	A(3; - 3),	B(6; 9),	C(12; 1).
7.	A(- 1; 2),	B(2; 14),	C(8; 6).
8.	A(5; - 4),	B(8; 8),	C(14; 0).
9.	A(- 4; 5),	B(- 1; 17),	C(5; 9).
10.	A(4; 4),	B(7; 16),	C(13; 8).

Задание 3. Вычислить пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

Варианты

В.1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-8x^3+x^2}{x^3-2x+4}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x+4}}{x}$

в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{5+14x-3x^2}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos 2x}$

д) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\left[\ln(3x+1)-\ln 3x\right]$.

В.2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x-1}{5-x+4x^2}$ б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{3x^2-40x+128}{8-x}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,3x}{x}$ г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x-1}$.

В.3. $a)\lim\limits_{x\to\infty}(2x-1)\left[\ln(2x-1)-\ln(2x+2)\right]$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin 3x}{1-\cos 4x}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-x^2+4}{5-4x+3x^2}$ г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-7x-2}{2x^2-x-6}$ д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{4-\sqrt{13+x}}$.

В.4. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4-x^3+4x}{3-x^3-3x^4}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+5}{4x+3}\right)^{2x-1}$ г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{x^2-3x+2}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$.

В.5. а) $\lim\limits_{x\to 11}\dfrac{2x^2-21x-11}{x-11}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x+1}{4x-1-2x^2}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{x-3}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-1)\left[\ln(3x+5)-\ln 3x\right]$.

В.6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-3x+2}{1+4x+2x^3}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x-1}\right)^{2x+1}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{3-\sqrt{9-x}}$ г) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+6x-8}{x+4}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$.

В.7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+3}\right)^{3x-4}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$ в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$

г) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5x^2-24x-5}{x^2-4x-5}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1-7x^2}{3x^2-2x+4}$.

В.8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15x^2-x+2}{2x^2+4x+1}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-7)\left[\ln(3x+4)-\ln(3x)\right]$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,tg\,4x}{\sin^2 3x}$ г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}{x+1}$ д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}$.

В.9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5x^2+7x}{1+4x^2-3x^3}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}x\,ctg\,4x$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-3}{3x+5}\right)^{x+1}$

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x-3}$ д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

В.10. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}{x-4}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{tg\,5x}$ д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-3}{2n+5}\right)^{3n+2}$.

Задание 3. Найти производные и дифференциалы функций.

Варианты

В.1 $а)\ y=\left(\frac{2}{x^3}-\sqrt[3]{x^2}+5\right)^4,$ $б)\ y=\frac{\arcsin\sqrt{x}}{x},$

$в)\ y=5^{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos x},$ $г)\ y=x^3 3^x+x\,ctgx.$

В.2 $а)\ y=(\cos 3x+5)^7,$ $б)\ y=\frac{x-\sin 2x}{2+\cos 2x},$

$в)\ y=2^{arctg\,x}+\ln x^3,$ $г)\ y=x^2\arcsin\sqrt{x}.$

В.3 $а)\ y=(\sin 2x-x+1)^5,$ $б)\ y=(x+3)\arccos x,$

$в)\ y=e^{arctg\sqrt{x}},$ $г)\ y=\sqrt[3]{\ln x}+\frac{x-2}{\sqrt{x+1}}.$

В.4 $а)\ y=\left(\arcsin 2x+x^2\right)^3,$ $б)\ y=\frac{x-\sin x}{\sqrt{x}},$

$в)\ y=\frac{1}{x+5}+3^{\ln\sqrt{x}},$ $г)\ y=x^5 arctg\,x+tg\left(x^2+1\right).$

В.5 $а)\ y=(\cos 3x+1)^2,$ $б)\ y=\frac{arcctg\,x+2}{x-1},$

$в)\ y=4^{\frac{2-x}{1+x}},$ $г)\ y=x^2 3^x+\ln\left(x^2+1\right).$

В.6 $а)\ y=\left(5x^3-\frac{2}{\sqrt{x}}+3\right)^7,$ $б)\ y=\frac{\arcsin 2x+1}{\sqrt{x}},$

$в)\ y=2^{\cos 3x}+\sqrt{x}\ln x,$ $г)\ y=2^{x+1}+\ln(\cos x).$

В.7 $а)\ y=\left(5x^3-\frac{1}{\sqrt{x}}+4\right)^{-3},$ $б)\ y=\lg\left(\frac{x+1}{3x-2}\right)^4+\frac{\sin 2x}{x},$

$в)\ y=\cos^2(x+3)+\ln^3(2-x),$ $г)\ y=x^3\arccos x.$

В.8 $а)\ y=\left(3x^5-\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x}\right)^7,$ $в)\ y=\frac{\sqrt{x^3-1}}{x+1},$

$в)\ y=tg\,x^3+ctg^5 x,$ $г)\ y=(x-1)^5(x+5)+\cos(x+1).$

В.9 $а)\ y=\left(\frac{x^3}{2}-\frac{1}{\cos x}+1\right)^2,$ $б)\ y=\frac{1-x}{\sin x}+\cos\left(2x^3+1\right),$

$в)\ y=\ln(x+3)^2+\ln^2(x+3),$ $г)\ y=2^{tg\,x+1}+x\arcsin\sqrt{x}.$

В.10 $а)\ y=\left(\sin 3x+x^2+\sqrt{x}\right)^6,$ $б)\ y=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+1}},$

$в)\ y=\dfrac{2}{\cos x}+\ln^2 x,$ $г)\ y=2^{tg\,x}+x\arcsin 2x.$

Задание 5. Найти неопределенные интегралы:

Варианты

В.1 а) $\int \dfrac{\sqrt[3]{x}-4x}{\sqrt{x}}dx;$ б) $\int x^2 \cos x^3\, dx;$ в) $\int (2x+3)\cos x\, dx;$

г) $\int \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx;$ д) $\int \dfrac{x^3\, dx}{\sqrt{1-x^4}}.$

В.2 а) $\int \dfrac{1}{(2x+3)^3}dx;$ б) $\int \dfrac{\ln x}{\sqrt[5]{x}}dx;$ в) $\int \sin^3 x \cos x\, dx;$

г) $\int \dfrac{x^3}{\cos^2 x^4}dx;$ д) $\int \dfrac{x-1}{e^{2x}}dx.$

В.3 а) $\int \dfrac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt[4]{x}}dx;$ б) $\int \dfrac{\ln(3x+1)}{3x+1}dx;$ в) $\int x^3 \ln x\, dx;$

г) $\int \dfrac{(x+1)}{\cos^2 3x}dx;$ д) $\int \dfrac{x^3\, dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}.$

В.4 а) $\int \sqrt{1-3x}\, dx;$ б) $\int \dfrac{\ln(3x+1)}{3x+1}dx;$ в) $\int (2x-1)\ 2^x\, dx;$

в) $\int \dfrac{dx}{\sin^2(2-x)};$ г) $\int \arcsin 3x\ dx.$

В.5 а) $\int \dfrac{x^2}{(x^3-2)^4}dx;$ б) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{3+\ln^2 x}};$ в) $\int (2x+3)\ e^{-2x}\, dx;$

г) $\int \dfrac{(2x-1)}{\sin^2 x}dx;$ д) $\int \dfrac{x^2\, dx}{2-x^3}.$

В.6 а) $\int \dfrac{\sqrt[3]{x}-4x}{\sqrt{x}}dx;$ б) $\int x^2 \cos x^3\, dx;$ в) $\int (2x+3)\cos x\, dx;$

г) $\int \frac{(2x+3)}{cos^2 x} dx$; д) $\int \frac{x^3 \ dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

В.7 а) $\int \frac{x^3}{(x^4+4)^5} dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$; в) $\int (3x-1)\ e^{3x}\ dx$;

г) $\int \frac{(3x+1)}{cos^2 x} dx$; д) $\int \frac{x^3 \ dx}{2x^4-3}$.

В.8 а) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+x+1}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int x^2 e^{x^3}\ dx$; в) $\int \ln\sqrt{1+x^2}\ dx$;

г) $\int (x+2) e^{-x}\ dx$; д) $\int \frac{tg^3 x\ dx}{\cos^2 x}$.

В.9 а) $\int \frac{1}{(3x-1)^4} dx$; б) $\int \frac{\ln\ x}{\sqrt[3]{x}} dx$; в) $\int \sqrt{\cos 2x}\ \ \sin 2x\, dx$;

г) $\int \frac{x^4}{\sin^2 x^5} dx$; д) $\int \frac{3-x\ dx}{e^{3x}}$.

В.10 а) $\int \sqrt{5-3x}\ dx$; б) $\int \frac{\ln(2x-1)}{2x-1} dx$; в) $\int (x+1)\ \ 3^x\ dx$;

г) $\int \frac{dx}{cos^2 (3-x)}$; д) $\int arctg\, 2x\ dx$.

Задания для контрольной работы № 2

Задание 1. Вычислить определённые интегралы:

Варианты

В.1 а) $\int\limits_0^1 \frac{e^x d\,x}{\sqrt{1+e^x}}$; б) $\int\limits_0^{e-1} \ln(x+1)\, d\,x$; в) $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} d\,x$.

В.2 а) $\int\limits_0^1 \frac{x\, d\,x}{\left(x^2+1\right)^2}$; б) $\int\limits_0^{\pi} x \sin x\, d\,x$; в) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\ \cos^3 x\, d\,x$.

В.3 а) $\int\limits_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{arctg\, x}{1+x^2} d\,x$; б) $\int\limits_0^{1/2} x e^{2x}\, d\,x$; в) $\int\limits_1^4 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} d\,x$.

В.4 а) $\int\limits_{0}^{\pi/4} tg\, x\, d\,x;$ б) $\int\limits_{0}^{e} x^2 \ln x\, d\,x;$ в) $\int\limits_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}}\, d\,x.$

В.5 а) $\int\limits_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{\arcsin x\, d\,x}{\sqrt{1-x^2}};$ б) $\int\limits_{0}^{1} x e^{-x}\, d\,x;$ в) $\int\limits_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}\, d\,x.$

В.6 а) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, d\,x;$ б) $\int\limits_{0}^{e} x \ln x\, d\,x;$ в) $\int\limits_{1}^{9} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}\, d\,x.$

В.7 а) $\int\limits_{0}^{1} \frac{3^x\, d\,x}{1+9^x};$ б) $\int\limits_{0}^{\pi/2} x \cos x\, d\,x;$ в) $\int\limits_{1}^{4} \frac{\sqrt{x}-6}{2\sqrt{x}}\, d\,x.$

В.8 а) $\int\limits_{1}^{e} \frac{1+\ln x}{x}\, d\,x;$ б) $\int\limits_{0}^{1} x\, 2^x\, d\,x;$ в) $\int\limits_{-3}^{3} x\sqrt{9-x^2}\, d\,x.$

В.9 а) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{2\sin x\, d\,x}{(1-\cos x)^2};$ б) $\int\limits_{0}^{e} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, d\,x;$ в) $\int\limits_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\, d\,x.$

В.10 а) $\int\limits_{-0,5}^{0,5} \frac{3^x\, d\,x}{1+9^x};$ б) $\int\limits_{0}^{1} (x+1)e^x\, d\,x;$ в) $\int\limits_{1}^{9} \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}}\, d\,x.$

Задание 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную заданными линиями.

Варианты

В.1 $y=(x-2)^2, \quad x-2y+4=0.$

В.2 $y=x^2+4x, \quad x-y+4=0.$

В.3 $y=x^2-2x-5, \quad x-y-1=0.$

В.4 $y=x^2+1, \quad x-y+1=0.$

В.5 $y=x^2-3, \quad 2x+y=0.$

В.6 $y=(x-4)^2, \quad 2x-y-8=0.$

В.7 $y=x^2+2x+1, \quad x-y+1=0.$

В.8 $y=-x^2, \quad x+y+2=0.$

В.9 $y=4-x^2, \quad 2x+y-4=0.$

В.10 $y=x^2-10x+32, \quad y-16=0.$

Задание 3. Дана функция двух переменных $z=f(x,\ y)$.

1) Найдите частные производные первого и второго порядков. Убедитесь в равенстве смешанных производных.
2) Найдите градиенты в общем виде и в точке А.
3) Найдите полный дифференциал функции.

Варианты

1. а) $z = x^2 y + 1,\ \ A(1,1)$; б) $z = \sqrt{x} + e^{x^2 - y},\ \ A(1,\ 1)$.

2. а) $z = (y^2 + 1)x^3,\ \ A(1,1)$; б) .

3. а) $z = (x^2 + 1)(y + 1),\ \ A(1,\ 0)$**;** б) $z = e^{x^2 + 2y},\ \ A(1,\ -0{,}5)$.

4. а) $z = x + y^2,\ \ A(0,1)$; б) $z = \sin(x^2 - y^2),\ \ A(1,\ 1)$.

5. а) $z = (x^2 + y^3)^2,\ \ A(0,\ 1)$**;** б) $z = e^{3 + x^2 - xy},\ \ A(1,\ 4)$.

6. а) $z = y^2(x + y),\ \ A(1,1)$; б) $z = x^y,\ \ A(2,\ 1)$.

7. а) $z = (x^3 - 1)(y^2 + 1),\ \ A(1,\ 2)$; б) $z = \sin(x^3 - y^3),\ \ A(1,\ 1)$.

8. а) $z = (x^2 + 4)y^3,\ \ A(2,1)$; б) $z = \ln(x^2 + xy),\ \ A(2,\ 4)$.

9. а) $z = 2(xy^3 + 2),\ \ A(1,\ 1)$**;** б) $z = \sqrt{x^3 + y^3},\ \ A(2,\ 1)$.

10. а) $z = (y - 1)x^2,\ \ A(1,2)$; б) $z = \sin(x^3) + 2y - \dfrac{x}{y},\ \ A(0,-1)$.

Задание 4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения. Найти ее числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Указать их смысловое значение.

Варианты

1.

X	–3	–2	1	2
p_i	0,2	0,3	0,4	0,1

2.

X	–2	–1	0	2	3	4

p_i	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2	0,1

3.

X	1	3	4	5
p_i	0,1	0,3	0,4	0,2

4.

X	–1	0	1	2	3	4
p_i	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1	0,1

5.

X	–2	–1	1	3
p_i	0,3	0,2	0,4	0,1

6.

X	1	2	4	6
p_i	0,2	0,3	0,4	0,1

7.

X	–2	0	1	2	3	4
p_i	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1

8.

X	1	3	4	6
p_i	0,2	0,2	0,5	0,1

9.

X	–2	–1	1	3
p_i	0,2	0,3	0,4	0,1

10.

X	–1	1	3	4
p_i	0,2	0,2	0,3	0,3

Задание 5. Предполагается, что вес в граммах готового блюда – случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону распределения с математическим ожиданием $M(X)$ и средним квадратическим отклонением $\sigma(X)$.

1) Определить вероятность того, что случайно выбранное блюдо будет иметь вес: а) больше q гр.; б) менее g гр.;

2) определить число блюд из m отобранных для контрольного взвешивания, у которых вес будет не менее k_1 и не более k_2 гр.

Варианты

1. $M(X)$=180; $\sigma(X)$=4; q=182; g=177; m=15; k_1=176; k_2=185.

2. $M(X)$=240; $\sigma(X)$=6; q=243; g=237; m=20; k_1=233; k_2=245.

3. $M(X)$=120; $\sigma(X)$=3; q=118; g=125; m=18; k_1=116; k_2=128.

4. $M(X)$=150; $\sigma(X)$=4; q=152; g=155; m=17; k_1=148; k_2=155.

5. $M(X)$=200; $\sigma(X)$=5; q=216; g=207; m=16; k_1=196; k_2=212.

6. $M(X)$=160; $\sigma(X)$=4; q=162; g=153; m=20; k_1=155; k_2=169.

7. $M(X)$=180; $\sigma(X)$=5; q=178; g=182; m=15; k_1=177; k_2=192.

8. $M(X)$=220; $\sigma(X)$=6; q=224; g=218; m=12; k_1=212; k_2=230.

9. $M(X)$=140; $\sigma(X)$=4; q=138; g=145; m=18; k_1=134; k_2=145.

10. $M(X)$=260; $\sigma(X)$=7; q=255; g=263; m=14; k_1=252; k_2=270.

Задание 6. Имеются выборочные данные о некотором показателе за несколько отчетных периодов. Необходимо:

1) Построить дискретный вариационный ряд изучаемой случайной величины и представить его графически.

2) Определить среднее значение этого показателя, оценить абсолютный и относительный разброс.

3) Построить доверительный интервал, в котором с вероятностью γ заключено среднее значение изучаемого показателя.

Варианты

1. Количество заказов на товары, продаваемые по каталогу (ден. ед.)

3,6; 4,0; 4,2; 4,2; 3,6; 4,0; 4,2; 4,3; 4,2; 4,3; 4,0, γ=0,9;

2. Цена на акции (у.е.)

43; 47; 45; 51; 45; 47; 45; 51; 45; 47, 45; 47, γ=0,99;

3. Объем товарооборота (ден. ед.)

61,2; 58,4; 65, 1; 67,4; 58,4; 61,2; 65,1; 61,2; 65,1; 65,1, γ=0,8;

4. Количество сделок (ед.)

23; 30; 25; 26; 30; 25; 23; 26; 26; 25; 32; 26, γ=0,99;

5. Величина основных фондов (ден. ед.)

60; 55; 68; 68; 54; 55; 60; 63; 54; 63; 55, 60; 60; 63, γ=0,8;

6. Месячная прибыль фирмы (ден. ед.)

4,3; 4,0; 4,2; 4,2 ; 3,6; 4,0; 4,2; 4,3; 4,2; 4,3; 4,0; 3,6, γ=0,9;

7. Месячная рентабельность (%)

23,5; 30,5; 25; 26; 30,5; 25; 23,5; 26; 26; 25; 32; 26, γ=0,95;

8. Коэффициент ритмичности работы

0,3; 0,5; 0,5; 0,4; 0,3; 0,6; 0,4; 0,6; 0,3; 0,4; 0,2; 0,4, γ=0,8;

9. Выручка от реализации продукции (ден. ед.)

530; 650; 680; 650; 590; 650; 590; 680; 590; 650, γ=0,95;

10. Количество заказов (шт./день)

7; 7; 9; 8; 6; 9; 7; 6; 7; 8; 5; 7; 6; 8, γ=0,99.

Задание 7. В результате выборочного обследования рабочих, имеющих стаж менее 5 лет, была получена информация об их месячной зарплате (тыс.руб.), которая представлена в виде интервального вариационного ряда.

По данным обследования необходимо:

1) Провести первичную обработку результатов, а именно: построить гистограмму частот; определить выборочные характеристики для зарплаты; оценить абсолютный и относительный разброс значений.

2) Полагая, что заработная плата есть случайная величина, имеющая нормальное распределение, найти доверительный интервал, в котором с вероятностью γ заключено среднее значение зарплаты.

Варианты

1. γ=0,9616

Зарплата (тыс.руб.)	менее 8	(8;10]	(10;12]	(12;14]	(14;16]	более 16
Количество человек	2	11	18	20	7	4

2. γ=0,9642

Зарплата (тыс.руб.)	менее 6	(6;10]	(10;14]	(14;18]	(18;22]	более 22
Количество человек	1	9	19	16	7	2

3. γ=0,9108

Зарплата (тыс.руб.)	менее 9	(9;11]	(11;13]	(13;15]	(15;17]	более 17

Количество человек	4	12	20	19	8	3

4. γ =0,9586

Зарплата (тыс.руб.)	менее 7,5	(7,5; 11,5]	(11,5;15,5]	(15,5;19,5]	более 19,5
Количество человек	3	12	23	14	4

5. γ =0,9342

Зарплата (тыс.руб.)	менее 7	(7;9]	(9;11]	(11;13]	(13;15]	более 15
Количество человек	1	8	20	18	11	3

6. γ =0,9312

Зарплата (тыс.руб.)	менее 8,5	(8,5;12,5]	(12,5;16,5]	(16,5;20,5]	более 20,5
Количество человек	4	10	24	8	2

7. γ =0,9556

Зарплата (тыс.руб.)	менее 7	(7;11]	(11;15]	(15;19]	более 19
Количество человек	3	18	21	16	4

8. γ =0,9328

Зарплата (тыс.руб.)	менее 8	(8;12]	(12;16]	(16;20]	более 20
Количество человек	5	14	16	11	2

9. γ =0,9476

Зарплата (тыс.руб.)	менее 10	(10;12]	(12;14]	(14;16]	(16;18]	более 18
Количество человек	6	11	15	12	9	2

10. γ =0,9652

Зарплата (тыс.руб.)	менее 9	(9;13]	(13;17]	(17;21]	более 21
Количество человек	5	15	23	12	3

Задание 8. При изучении химического состава плодов черники было обследовано десять образцов ягод и получены следующие данные о содержании сухих веществ X (%) и органических кислот Y (%) в исследуемых образцах. Выполнить следующую статистическую обработку данных:

1. построить диаграмму рассеяния;
2. полагая, что между признаками X и Y имеет место линейная корреляционная зависимость определить выборочный коэффициент корреляции $r_в$, сделать вывод о направлении и тесноте этой связи;
3. найти выборочное уравнение линейной регрессии. Используя полученное уравнение, оценить ожидаемое среднее значение признака Y, когда признак X примет значение $x = x_0$ (%);
4. построить линию регрессии на том же рисунке, на котором построена диаграмма рассеяния.

Варианты

1. x_0 =14,9

Сухое вещество X (%)	14,4	14,9	14,0	15,2	15,3	13,5	14,9	14,8	15,0	14,2
Органические кислоты Y (%)	1,19	1,23	0,96	1,36	1,42	1,1	1,22	1,3	1,23	1,12

2. x_0 =13,7

Сухое вещество X (%)	13,8	14,7	14,0	15,1	15,3	13,5	14,6	14,8	14,9	14,3
Органические кислоты Y (%)	1,18	1,22	0,95	1,32	1,42	1,1	1,17	1,3	1,24	1,1

3. x_0 =13,8

Сухое вещество X (%)	14,5	14,7	14,0	15,1	15,3	13,5	14,9	14,8	14,3	15,0

Органические кислоты Y (%)	1,2	1,22	0,95	1,32	1,42	1,1	1,22	1,3	1,13	1,21

4. x_0 =14,1

Сухое вещество X (%)	13,5	14,7	14,0	15,1	15,3	13,5	14,9	14,8	15,0	14,3
Органические кислоты Y (%)	1,11	1,21	0,95	1,34	1,42	1,1	1,22	1,3	1,23	1,1

5. x_0 =14,2

Сухое вещество X (%)	13,9	14,6	14,0	15,2	15,3	13,5	14,9	14,8	15,0	14,6
Органические кислоты Y (%)	1,2	1,2	0,95	1,34	1,41	1,1	1,22	1,3	1,23	1,18

6. x_0 =14,7

Сухое вещество X (%)	14,3	14,8	14,0	15,1	15,3	13,5	14,9	14,8	15,1	14,4
Органические кислоты Y (%)	1,19	1,22	0,95	1,34	1,42	1,1	1,22	1,3	1,26	1,16

7. x_0 =14,5

Сухое вещество X (%)	14,5	14,7	14,0	15,1	15,3	13,5	14,9	14,8	15,0	14,3
Органические кислоты Y (%)	1,21	1,22	0,98	1,32	1,42	1,1	1,27	1,3	1,23	1,1

8. x_0 =14,6

Сухое вещество X (%)	14,1	14,7	14,0	15,1	15,4	13,5	14,9	14,8	15,0	14,3
Органические кислоты Y (%)	1,14	1,22	0,99	1,34	1,43	1,1	1,22	1,3	1,23	1,1

9. x_0 =14,1

Сухое вещество X (%)	14,5	14,8	14,0	15,1	15,3	13,6	14,9	14,8	14,9	14,1
Органические кислоты Y (%)	1,2	1,22	1,04	1,36	1,42	1,15	1,26	1,29	1,26	1,1

10. x_0=13,9

Сухое вещество X (%)	14,2	14,8	14,0	15,0	15,3	13,5	14,8	14,8	15,0	14,3
Органические кислоты Y (%)	1,27	1,24	0,97	1,34	1,41	1,1	1,22	1,3	1,23	1,1

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0.6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0.8	2807	2874	2850	2827	2800	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2664	2637	2613	2589	2565	2544	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1569	1518

1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1.7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2.5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0048
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3.1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3.4	0012	0012	0012	001	001	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	'0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3.7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0.64	0,2389	0,96	0.3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0.3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0.66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0.0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0.37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0.2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0.75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0.3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0.2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0.2881	1,12	0,3686
0.17	0,0675	0.49	0.1879	0,81	0.2910	1,13	0.3708
0,18	0,0714	0.50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0.1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0.21	0.0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0.3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0.3051	1,18	0,3810
0.23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0.3106	1,20	0.3849
0.25	0,0987	0.57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0.1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0.27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0.3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0.60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0.31	0,1217	0,63	0,2357	0.95	0,3289		

Продолжение приложения 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0.3962	1,59	0,4441	1,92	0.4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1.60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0.4941
1.28	0.3997	1,61	0,4463	1,94	0.4738	2,54	0,4945
1,29	0.4015	1,62	0.4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1.31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1.32	0.4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2.62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1.34	0.4099	1,67	0.4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1.35	0,4115	1,68	0,4535	2.02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0.4965
1,37	0,4147	1,70	0.4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1.39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2.78	0,4973
1.41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1.43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1.44	0.4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1.45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1.46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1.47	0.4292	1,80	0.4641	2,26	0,4881	2,92	0.4982
1.48	0,4306	1.81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984

Окончание приложения 2

1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0.4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1.89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0.4719	2.48	0,4934	5,00	0,499997

Приложение 3

Таблица значений коэффициента $T(n,\gamma)$

n	γ					
	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
3	1,886	2,92	4,30	6,96	9,92	31,6
4	1,638	2,35	3,18	4,54	5,84	12,94
5	1,533	2,13	2,77	3,75	4,60	8,61
6	1,476	2,02	2,57	3,36	4,03	6,86
7	1,440	1,943	2,45	3,14	3,71	5,96
8	1,415	1,895	2,36	3,00	3,50	5,40
9	1,397	1,860	2,31	2,90	3,36	5,04
10	1,383	1,833	2,26	2,82	3,25	4,78
11	1,372	1,812	2,23	2,76	3,17	4,59
12	1,363	1,796	2,20	2,72	3,11	4,49
13	1,356	1,782	2,18	2,68	3,06	4,32
14	1,350	1,771	2,16	2,65	3,01	4,22
15	1,345	1,761	2,14	2,62	2,98	4,14
16	1,341	1,753	2,13	2,60	2,95	4,07
17	1,337	1,746	2,12	2,58	2,92	4,02
18	1,333	1,740	2,11	2,57	2,90	3,96
19	1,330	1,734	2,10	2,55	2,88	3,92
20	1,328	1,729	2,09	2,54	2,86	3,88
21	1,325	1,725	2,09	2,53	2,84	3,85
22	1,323	1,721	2,08	2,52	2,83	3,82
23	1,321	1,717	2,07	2,51	2,82	3,79
24	1,319	1,714	2,07	2,50	2,81	3,77
25	1,318	1,711	2,06	2,49	2,80	3,74
26	1,316	1,708	2,06	2,48	2,79	3,72
27	1,315	1,706	2,06	2,48	2,78	3,71
28	1,314	1,703	2,05	2,47	2,77	3,69
29	1,313	1,701	2,05	2,47	2,76	3,67
30	1,311	1,699	2,04	2,46	2,76	3,66

Библиографический список

Основная литература

1. Прошкин, С.С. Математика для решения физических задач [Электронный ресурс] : учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по техническим и технологическим направлениям / С. С. Прошкин. - Электрон. дан. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2014. – 384 с. **Режим доступа:** http://lib3.sfu-kras.ru/ft/lib2/elib_dc/lan_01.04.2017/i-126969380.pdf

2. Шипачев В.С. Высшая математика [Текст]: учебник / В.С. Шипачев. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. – 479 с.
Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=469720

3. Юдин С.В. Математика и экономико-математические модели [Текст] : Учебник / С.В. Юдин. – Москва: Издательский Центр РИОР ; Москва: ООО "Научно-издательский центр ИНФРА-М", 2016. – 374 с.
Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=491811

Дополнительная литература

4. Дорофеев, С. Н. Высшая математика [Текст] / С. Н. Дорофеев. – Москва : Оникс, 2011. - 592 с. : ил. - (Полный конспект лекций).
Режим доступа: http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785946666220.html

5. Шапкин А.С. Задачи с решениями по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию [Электронный ресурс] : учеб. пособие для бакалавров / А.С. Шапкин, В.А. Шапкин. – 8-е изд. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2013. – 432 с.
Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=430613

6. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике [Текст]: учеб. пособие / В.С. Шипачев. – 10-е изд., стер. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2017. – 304 с.
Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=470407

7. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике [Текст] : учеб. пособие для втузов / В.П. Минорский. – М. : Изд-во физ.-мат. лит., 2010. – 336 с.

8. Севастьянова Н. А. Случайные события [Текст] : учеб.-практ. пособие для студентов экон. специальностей всех форм обучения / Н.А. Севастьянова, Е.А. Попова; Краснояр. гос. торгово-эконом. ин-т. – Красноярск : КГТЭИ, 2011. – 90 с.
9. Ильин, В. А. Высшая математика [Текст] : учебник для вузов / В. А. Ильин, А. В. Куркина ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. - 3-е изд., перераб. и доп. - Москва : Проспект, 2011. - 592 с.