Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждениевысшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕХАНИКА

Методические указания для выполнения контрольной работы
для студентов направление подготовки
19.03.04 Технология продукции и организация общественного питания
профиль 19.03.04.30 Технология продукции и организация общественного
питания заочной формы обучения

Красноярск 2022

Механика: Методические указания по выполнению контрольных работ для студентов направления 19.03.04 Технология продукции и организация общественного питания, всех форм обучения / сост.: С.А. Худоногов, С.Г. Марченкова / ИТиСУ СФУ; – Красноярск, 2022 – 45 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Общие указания

Теоретическая механика изучает общие законы механического движения и взаимодействия материальных тел. Курс теоретической механики состоит из трех основных разделов: статика, кинематика и динамика. В качестве основных учебников по теоретической механике рекомендуются следующие издания:

1. Покровский В.В. Механика. Методы решения задач. [текст]: учебное пособие/. В.В. Покровский. – изд –во «Лаборатория знаний», 2015 -256с. Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/84100#book_name
2. Молотников В.Я. Техническая механика. [текст]: учебное пособие/. В.Я. Молотников. – изд – во «Лань», 2017 – 476с. Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/91295#book_name
3. Расчёт и конструирование деталей машин: тексты лекций [Электронный ресурс] / Р.А. Усманов - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. – 168с. Режим доступа: http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785788216454.html

Курс теоретической механики для студентов заочного отделения специальности «Технология продукции общественного питания» включает в себя следующие темы:

Основные понятия и аксиомы статики. Система сходящихся сил. Момент силы и пара сил. Плоская и пространственная системы параллельных и произвольных сил. Равновесие системы сил. Центр тяжести. Трение.

Кинематика точки. Основные кинематические характеристики движения материальной точки и твердого тела. Поступательное, вращательное и плоско-параллельное движение твердого тела. Сложное движение точки.

Динамика. Основные законы динамики. Дифференциальные уравнения движения точки. Динамика системы и твердого тела. В процессе изучения курса теоретической механики студенты заочного и ускоренного обучения должны выполнить контрольную работу.

Основные требования к оформлению контрольных работ

1. Контрольная работа выполняется в отдельной тетради или на листах формата А4.
2. Титульный лист необходимо оформлять в соответствии со стандартом СФУ.
3. Выполнение работы начинается с выполнения рисунка и краткой записи условия задачи (исходных данных и подлежащих определению величин). На рис. приводятся все необходимые обозначения.
4. Решение каждой задачи должно сопровождаться краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т.п.) и подробным изложением хода расчета.
5. На каждой странице необходимо оставлять поля для замечаний преподавателя.

ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Номера вариантов задач в контрольных работах определяются в зависимости от шифра зачетной книжки студента. Номер рисунка выбирается по предпоследней цифре шифра, а номер условия в таблице – по последней цифре.

РАЗДЕЛ I. СТАТИКА

Общие методические указания к решению задач по статике

Статика – раздел механики, в котором излагается общее учение о силах, изучаются условия равновесия системы сил, действующих на материальные тела.

Сила – представляет собой количественную меру взаимодействия двух тел, является векторной величиной и характеризуется модулем, направлением и точкой приложения; поэтому с силами можно производить все векторные преобразования: разложение на составляющие; сложение сил, приложенных к одной точке по правилу параллелограмма; представление вектора силы в виде геометрической суммы его составляющих по координатным осям.

Совокупность сил, действующих на какое-либо твёрдое тело, называется **системой сил.**

В систему сил могут входить как активные (заданные) силы, так и реактивные (результат действия связей, т.е. тел, ограничивающих перемещение в пространстве рассматриваемого тела). Характер реакции зависит от вида связи.

При решении задач по статике необходимо придерживаться следующей последовательности:

1. Переписать текст задачи и вычертить заданную схему.

2. Выбрать объект равновесия, т.е. то тело (или систему тел), равновесие которого рассматривается. Таким телом может быть или вся конструкция в целом, или любой ее элемент (узел).

3. К телу, равновесие которого рассматривается применить принцип освобождаемости, т.е. тело мысленно освободить от связей (отбросить связи). Действие этих связей заменить соответствующими реакциями. Применение принципа освобождаемости требует построения ещё одного рисунка, на котором рассматриваемый объект равновесия изображается свободным с указанием всех действующих на него сил – заданных условием задачи и реакцией связей.

4. Полученная система сил должна быть классифицирована: это может быть система сходящихся, параллельных или произвольных сил, расположенных на плоскости или в пространстве. Для полученной системы сил нужно указать соответствующие условия равновесия – геометрические (векторные) и аналитические (системы уравнений).

5. Решить задачу и получить искомые величины. При решении задач аналитическим методом на рисунке необходимо показать направления осей

координат. Уравнения равновесия записываются сначала с помощью принятых обозначений: $\sum F_{kX}=0$, $\sum F_{kY}=0$, $\sum F_{kZ}=0$, $\sum M_0=0$; рядом даётся их расшифровка в буквенном виде. Уравнения рекомендуется решать по возможности в общем виде, численные значения подставлять только в окончательные результаты.

6. По окончании решения задачи нужно проанализировать полученные результаты, уточнить действительное направление реакций.

ЗАДАНИЕ 1
Тема: Равновесие системы сходящихся сил

В приведенных ниже задачах рассматривается тело, находящееся в равновесии под действием плоской системы сходящихся сил. Существует три метода решения подобных задач:

1) аналитический, заключающийся в составления двух уравнений равновесия: $\sum F_{kX}=0, \sum F_{kY}=0$; 2) графический - путем построения в принятом масштабе сил замкнутого силового многоугольника; 3) графоаналитический - путём построения замкнутого силового треугольника без соблюдения масштаба с последующим определением неизвестных сил с помощью тригонометрических соотношений.

Наиболее универсальным методом решения задач на равновесие сходящихся сил является аналитический метод. Точность решения задачи графическим методом зависит от точности соблюдения масштаба сил и направлений их действия при построении силового многоугольника.

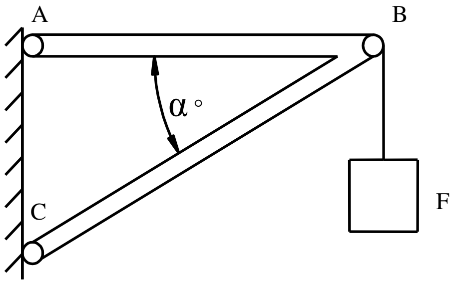
Рекомендуется решать задачу аналитически, а затем проверить правильность решения графоаналитическим или графическим методами. Последовательность решения задач по данному разделу дана выше. Далее даны условия задач и приведены примеры решения.

Задачи к контрольному заданию 1.

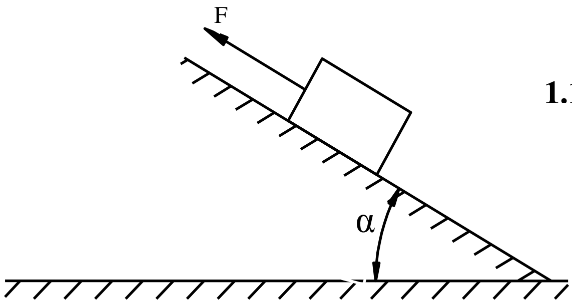
Задача 0. Определить усилия, возникающие в стержнях *AB* и *BC* кронштейна (рис. 1.0) удерживающего груз *P*.

Задача 1. Тело весом P (рис. 1.1) под действием силы *F*, направленной параллельно наклонной плоскости перемещается равномерно вверх. Приняв силу трения $F_{TP}=kP$ определить величину силы *F* и нормальную реакцию наклонной плоскости. **Задача 2.** К середине закрепленного троса (рис. 1.2) подвешен указатель весом *P*. Определить натяжение троса, длиной L=*ABC* , с провисанием h= *DB* .

Задача 3. Определить давление цилиндра весом P (рис. 1.3) на гладкую вертикальную стену и настил, составляющий с горизонтальной поверхностью угол, равный α.

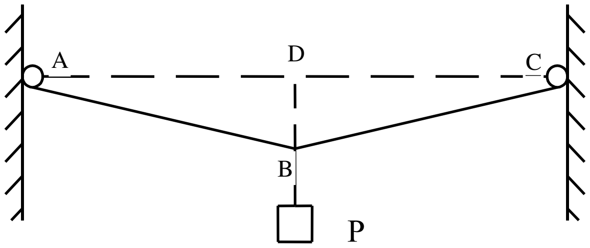


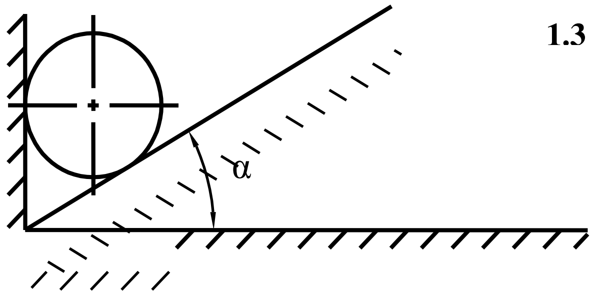
1.0



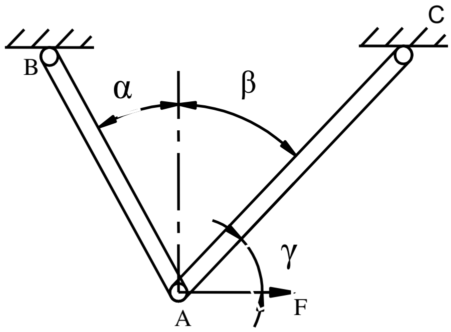
1.1

1.2

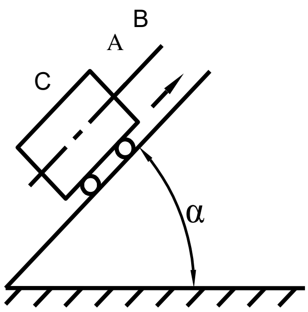




1.3

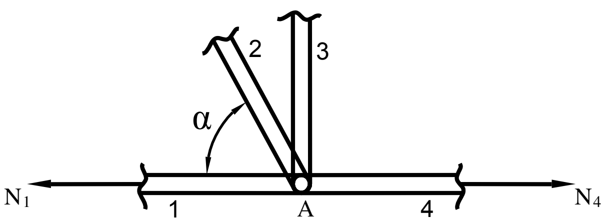


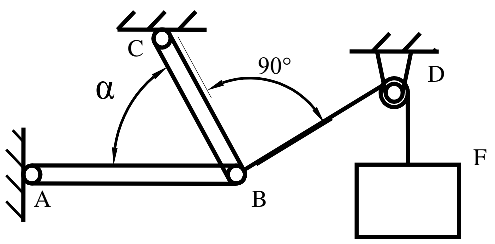
1.4



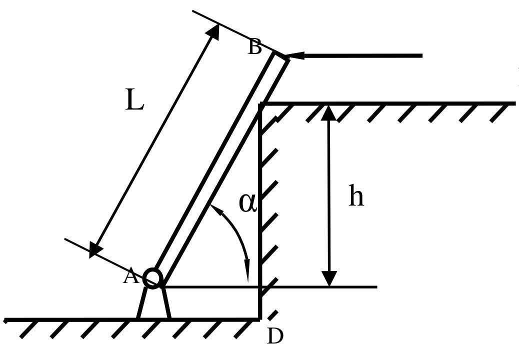
1.5

1.6

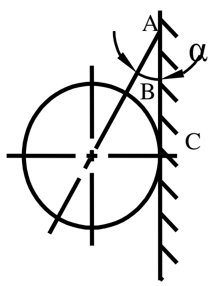




1.7



1.8



1.9

Задача 4. Определить усилия, возникающие в стержнях *AB* и *AC* конструкции (рис. 1.4), если к узлу *A* приложена горизонтальная сила

F . Весом стержней пренебречь.

Задача 5. Вагонетка с грузом P (рис. 1.5) равномерно поднимается из шахты при помощи тягового троса. Определить натяжение тягового троса *AB* и силу давления вагонетки на рельсы. Считать вес вагонетки приложенным в точке *C*. Трением пренебречь.

Задача 6. В шарнирном узле *A* фермы строительной конструкции (рис. 1.6) сходятся четыре стержня. Усилия в стержнях *1* и *4* известны и равны соответственно N_1 и N_4. Определить усилия N_2 и N_3, возникающие в стержнях *2*, *3* соответственно.

Задача 7. Груз весом *P* (рис. 1.7) подвешен к нити, прикрепленной к шарниру *B* и перекинутой через блок *D*. Определить усилия в стержнях *AB* и *BC*.

Задача 8. Однородный брус *AB* весом *P* и длиной L (рис. 1.8) шарнирно закреплен в точке *A* и опирается в точке *C* на ребро стенки. Определить реакции опор, если высота стенки *h*= *CD*.

Задача 9. Шар весом *P* (рис. 1.9) подвешен на нити *AB* и опирается на гладкую вертикальную стенку. Нить составляет со стенкой угол α. Определить натяжение нити *AB* и давление шара на стенку.

Табл. к рис.1.0

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P, кН	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
α , град	30	40	45	50	20	30	40	45	50	60

Табл. к рис.1.1

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P, Н	25	35	40	45	50	30	40	45	50	55
α, град	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
k=Fтр/P	0.15	0.14	0.12	0.11	0.10	0.09	0.08	0.07	0.08	0.07

Табл. к рис.1.2

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P, Н	40	45	50	55	58	60	65	70	75	80
L,м	32	36	40	44	48	50	55	60	65	70
h,м	0.16	0.18	0.19	0.20	0.21	0.24	0.27	0.30	0.32	0.34

Табл. к рис.1.3

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P,кН	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8
α,град	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65

Табл. к рис.1.4

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F,кН	0.9	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8
α,град	20	30	35	40	45	50	55	60	62	65
β,град	40	30	45	50	55	50	45	70	58	45
γ,град	50	60	45	40	35	40	45	20	32	45

Табл. к рис.1.5

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P,кН	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
α,град	20	25	30	32	35	37	40	42	45	50

Табл. к рис.1.6

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N1, кН	30	50	40	50	50	40	70	80	70	60
N4,кН	40	30	60	50	40	60	30	40	30	70
α,град	40	20	50	45	55	70	60	65	50	55

Табл. к рис.1.7

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P,кН	0.8	1.2	11.6	2.0	2.4	2.8	3.0	3.2	3.6	4.0
α,град	20	30	35	40	45	50	55	60	65	70

Табл. к рис.1.8

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P,кН	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8
L,м	4	6	7	8	10	12	8	9	10	11
h,м	2	3	4	5	6	8	5	6	7	8
α,град	40	45	50	55	40	45	50	55	60	65

Табл. к рис.1.9

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P,Н	150	170	180	190	200	210	220	230	240	250
α,град	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65

Примечание. Схемы выполнять в масштабе согласно исходных данных.

Примеры решения задач по статике.

Пример I. К стержню *AB* (рис. 2.1), поддерживаемому в равновесии тросом, перекинутым через блок *C*, подвешен груз *P* = *2 кН*. Определить усилие, возникающее в стержне *AB,* и вес груза *G*, натягивающего трос.

Решение. Решение задачи проводим аналитическим методом. рассмотрим равновесие точки *A*, в которой сходятся линии действия всех сил. Отбросим связи и заменим их действие реакциями. Рассматриваемая точка *A* находится в равновесия под действием трех сил: силы тяжести груза *P*, реакции R_{AB} стержня *AB* и реакции *T* натяжения троса *AC*, равной весу груза *G*. Трос АС - растянут, поэтому направляем вектор, изображающий силу *T* от точки А, вектор R_{AB} направляем также от точки А, предполагая, что стержень АВ растянут. Если это предположение окажется неверным, то искомая реакция стержня получится в ответе со знаком минус, показывая, что стержень сжат, истинное направление реакции будет противоположно. Расчетная схема показана на рис. 2.2.

Показываем направление координатных осей. Составляем два уравнения равновесия для полученной плоской системы сходящихся сил:

$$\sum F_{kX} = R_{AB} \cdot sin45^{\circ} - T \cdot sin30^{\circ} = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_{kY} = R_{AB} \cdot cos45^{\circ} + T \cdot cos30^{\circ} - P = 0 \qquad (2)$$

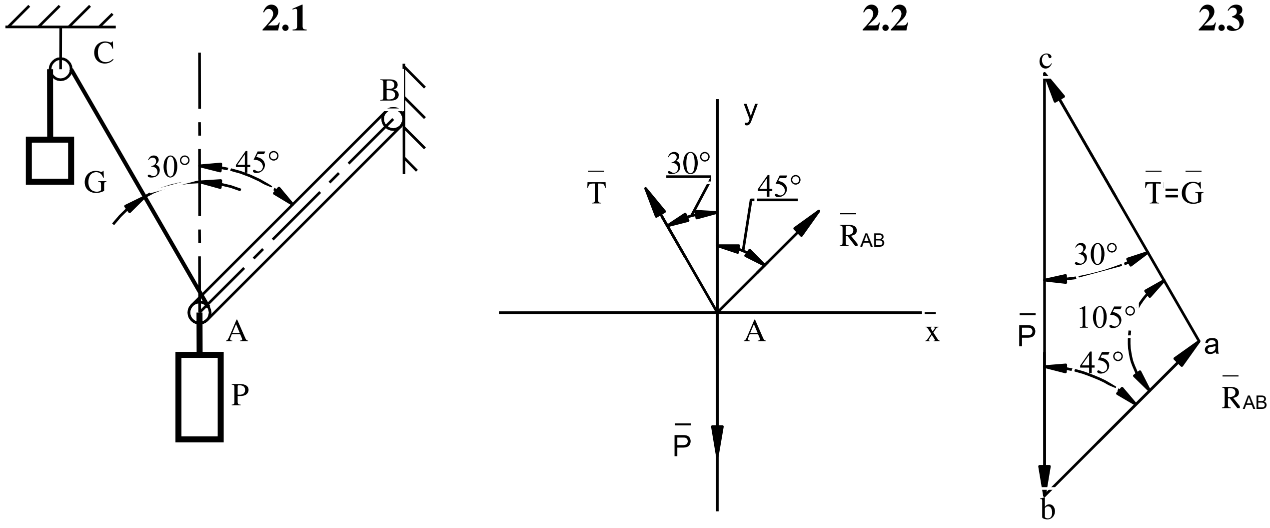


Рис. 2

Решаем полученную систему уравнений. Из уравнения (1) выражаем R_{AB}:

$$R_{AB} = T \cdot sin30^{\circ} / sin45^{\circ} = T \cdot 0{,}5 / 0{,}707$$

и подставляем в уравнение (2):

$$0{,}5T + 0{,}866T = 2$$

$$1{,}366T=2$$
$$G=T=1{,}464 кН$$

подставив данное значение в уравнение (1):

$$R_{AB}=0{,}707T=0{,}707\cdot 1{,}464=1{,}035\ кН$$

Полученные реакции положительны, это указывает на то, что выбранное направление R_{AB} верное, т.е. стержень растянут.

Правильность решения проверяем графоаналитическим методом с использованием тригонометрических соотношений. Для этого строим замкнутый силовой треугольник (рис. 2.3). Проводим из произвольной точки c вертикально вниз вектор заданной силы P в масштабе. Через начало и конец этого вектора проводим известные направления реакции R_{AB} и силы натяжения троса T. Из полученного силового треугольник cba по теореме синусов:

$$R_{AB}/\sin 30^\circ=T/\sin 45^\circ=G/\sin 105^\circ$$

Из решения пропорций находим:

$$T=\frac{G\cdot \sin 45^\circ}{\sin 105^\circ}=\frac{2\cdot 0{,}707}{0{,}966}=1{,}464\ кН;$$

$$R_{AB}=\frac{G\cdot \sin 30^\circ}{\sin 105^\circ}=\frac{2\cdot 0{,}5}{0{,}966}=1{,}035-кН.$$

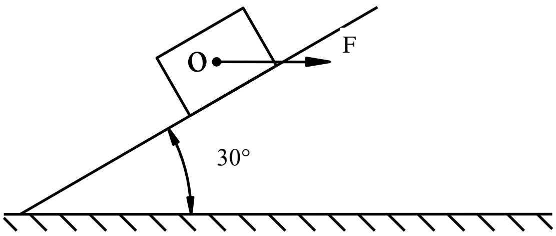
Таким образом, реакции определены правильно.

Пример 2. Под действием горизонтальной силы $F = 7{,}5\ Н$ тело перемещается равномерно вверх по наклонной плоскости (рис. 3.1). Определить вес тела и нормальную реакцию наклонной плоскости, если сила трения $F_{ТР} = 1{,}5\ Н$

Решение. Решаем задачу аналитическим методом. Рассмотрим равновесие тела на наклонной плоскости, заменив действие связей их реакциями. В точке O сходятся линии действия всех действующих на тело сил – веса тела G, горизонтальной силы F, силы трения $F_{ТР}$, направленной вдоль наклонной плоскости вниз и нормальной реакции N, перпендикулярной наклонной плоскости. Расчетная схема показана на рис.3.2.

Совместим ось X с направлением наклонной плоскости, а ось Y с направлением неизвестной силы N (в этом случае проекция силы на ось X равна нулю, т.е. в уравнение $\sum F_{kX} = 0$ сила N не войдет, таким образом, мы получим уравнение с одной неизвестной).

3.1



3.2

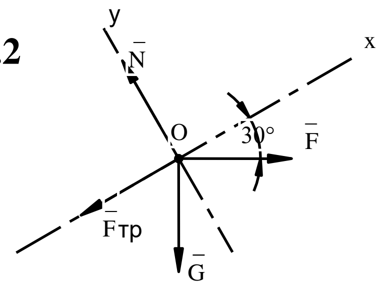


Рис. 3

Составляем два уравнения равновесия для плоской системы сходящихся сил:

$$\sum F_{kX} = F \cdot cos\,30^{O} - F_{TP} - G \cdot sin\,30^{O} = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_{kY} = N - G \cdot cos\,30^{\circ} - F \cdot sin\,30^{\circ} = 0 \qquad (2)$$

или

$$7{,}5 \cdot 0{,}866 - 1{,}5 - G \cdot 0{,}5 = 0$$

$$N - G \cdot 0{,}866 - 7{,}5 \cdot 0{,}5 = 0$$

Определяем неизвестные силы G и N, решая полученную систему уравнений. Из уравнения (1):

$$G = (6{,}495 - 1{,}5)\,/0{,}5 \approx 10\ H$$

Подставляя найденное значение G в уравнение (2) найдем:

$$N = G \cdot 0{,}866 + 7{,}5 \cdot 0{,}5 = 8{,}66 + 3{,}75 = 12{,}41\ H$$

Полученные результаты положительны, т.е. выбранные направления сил верны.

ЗАДАНИЕ 2

Тема: Равновесие плоской произвольной системы сил

Задача 1.

Балка AB имеет в точке A неподвижную шарнирную опору, а в точке B-подвижную шарнирную опору на катках (рис. 4). Определить реакции опор при заданных силовых нагрузках. Числовые данные взять из табл. 1

Таблица 1

№ условия	P, кН	M, кН × м	q, кН/м	a, м
0	50	120	20	2
1	20	30	30	1
2	60	200	20	4
3	120	300	50	3
4	100	250	40	2
5	150	600	25	5
6	60	120	15	2,5
7	20	40	10	1,5
8	100	500	30	4
9	100	400	40	3

Пример решения задачи 1.

Балка *AB* имеет в точке *A* неподвижную шарнирную опору, а в точке *B* подвижную шарнирную опору на катках (рис.5). На середине балки приложена сила *P=4qa*, на участке *AC* действует распределенная нагрузка интенсивностью *q*. Определить реакции опор, если *q = 30 кН/м*, *a = 2 м*, *M*=100кН х м

Решение. Применим к балке *AB* принцип освобождаемости. Связями для нее являются шарнирная и шарнирно-неподвижная опоры. Отбрасываем связи, заменяя их соответствующими реакциями $\overline{R_A}$ и $\overline{R_B}$. Выбираем направление координатных осей *xy*.

Записываем уравнения равновесия, учитывая, что распределенную нагрузку *q* можно заменить равнодействующей *Q* = *q·a*, приложенной к середине участка *AC*:

$$\sum m_A(\overline{F_k}) = 0; R_B \cdot 2a - P \cdot a - q \cdot a \cdot 0{,}5a - M == 0 \qquad (1)$$

$$\sum m_B(\overline{F_k}) = 0; -R_A \cdot 2a + P \cdot a + q \cdot a \cdot 1{,}5a - M = 0 \qquad (2)$$

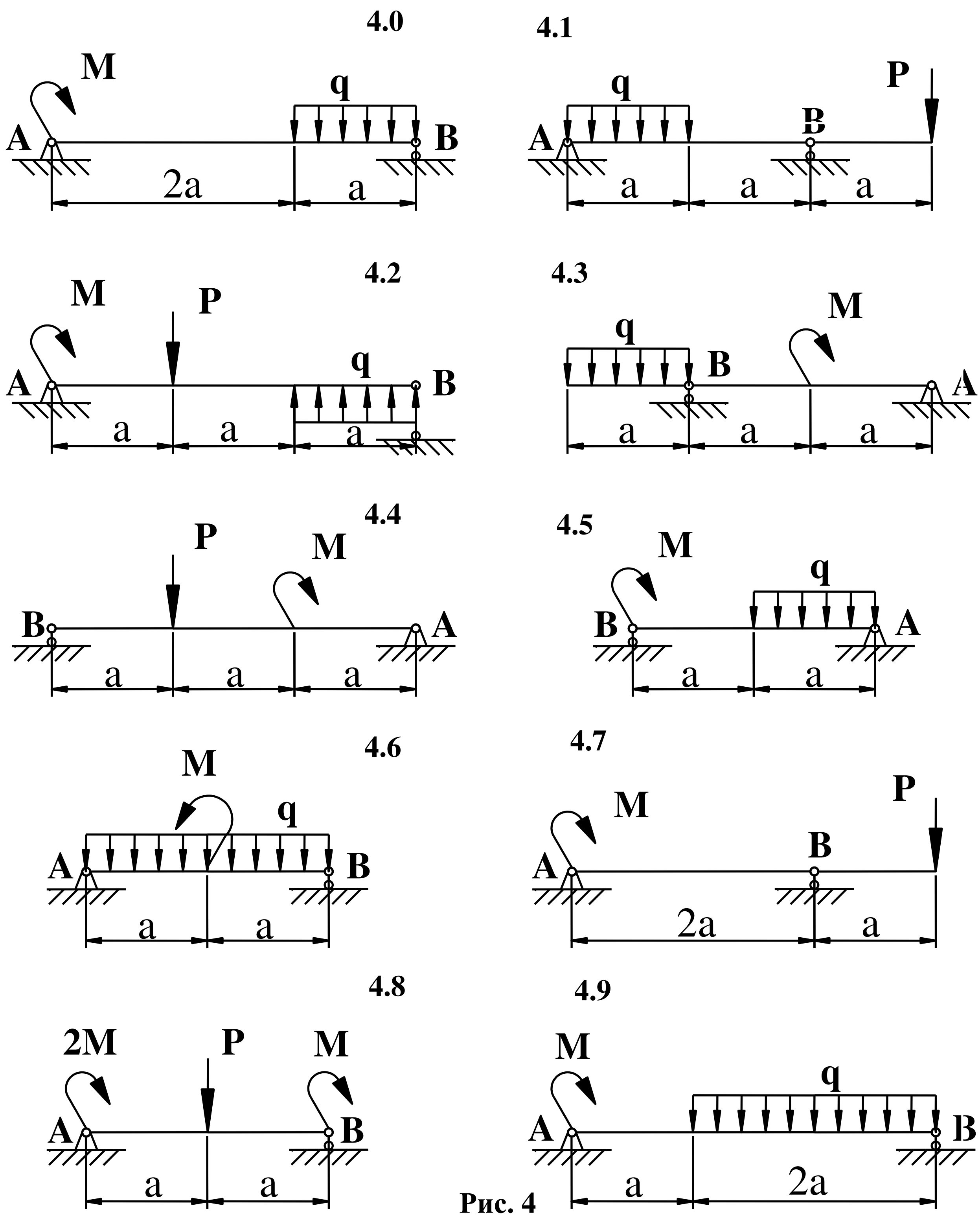


Рис. 4

Из уравнения (1) выражаем R_B:

P

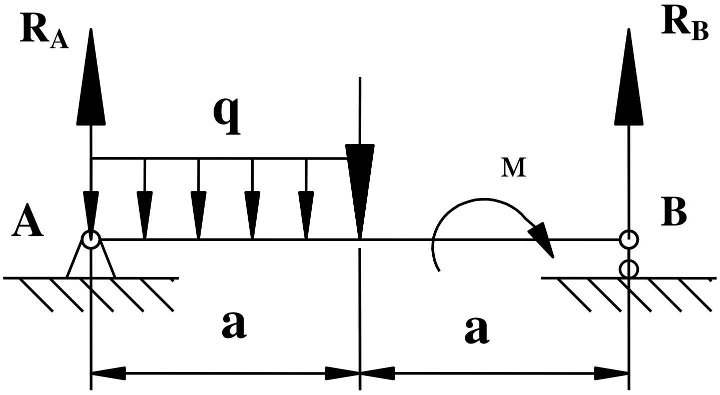


Рис. 5

$$R_B = \frac{P \cdot a + M + q \cdot a \cdot 0{,}5a}{2a} = \frac{4qa^2 + M + 0{,}5qa^2}{2a} = 160\ кН$$

Из уравнения (2) выражаем R_A:

$$R_A = \frac{P \cdot a - M + q \cdot a \cdot 1{,}5a}{2a} = \frac{4qa^2 - M + 1{,}5qa^2}{2a} = 140кН$$

Для проверки правильности нахождения реакций составим еще одно уравнение равновесия:

$$\sum F_{kY} = R_A + R_B - P - q \cdot a = 140 + 160 - 240 - 60 = 0$$

Таким образом, выполненная проверка подтверждает правильность нахождения реакций. Положительные значения реакций указывают на правильность выбранных направлений.

Задача 2.

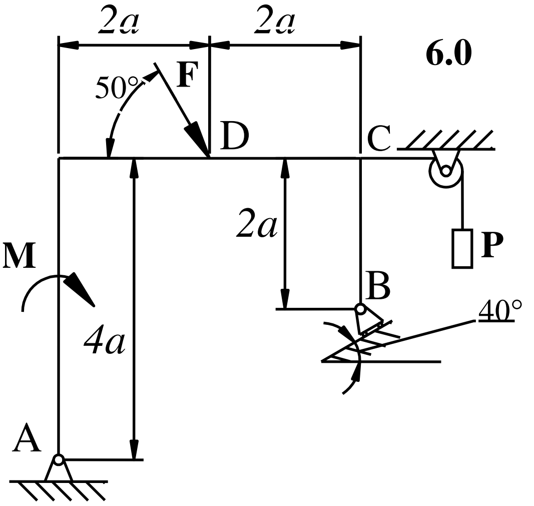
Жесткая рама, расположенная в вертикальной плоскости (рис. 6). закреплена в точке A шарнирно, а в точке B прикреплена или к невесомому стержню с шарнирами на концах, или к шарнирной опоре на катках.

В точке C к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом P. На раму действует пара сил с моментом M и сила F, приложенная в точке D. Определить реакции связей в точках A и B, вызываемые действующими нагрузками. Данные взять из табл.2.

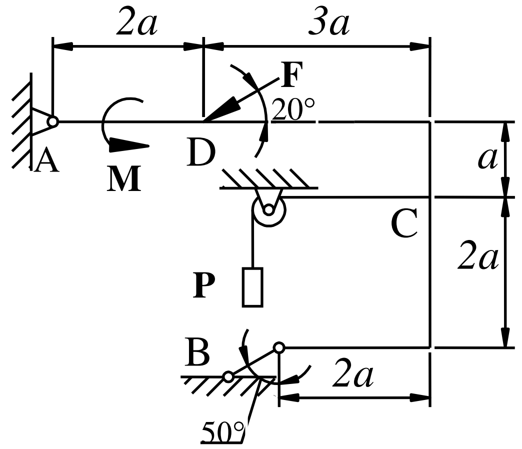
Таблица 2.

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Р,кН	40	50	60	30	80	70	60	100	90	80
F,кН	30	40	70	40	70	85	75	120	70	100
М,кН×м	120	150	200	150	200	200	250	300	150	300
a,м	1.0	2.0	3.0	1.5	2.0	2.5	3.0	2.0	1.5	3.0

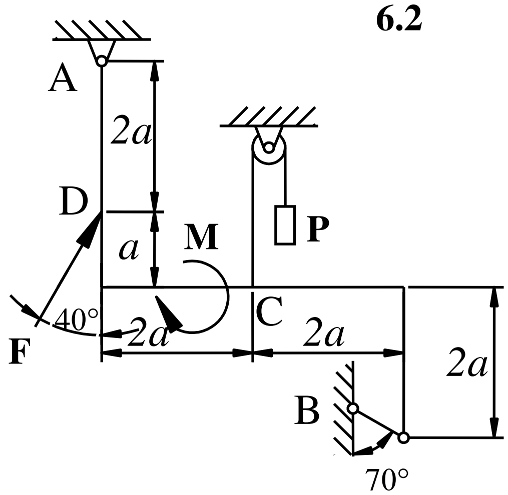
6.0



6.1



6.2



6.3

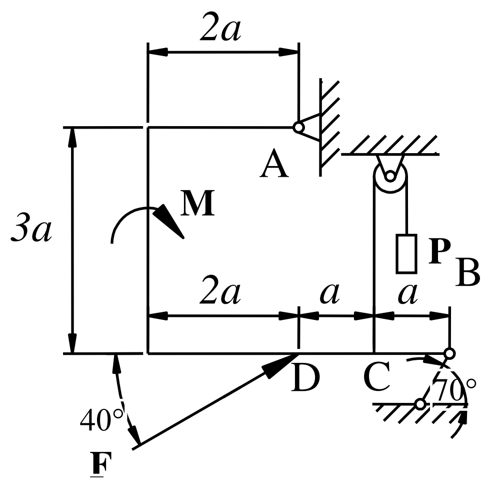
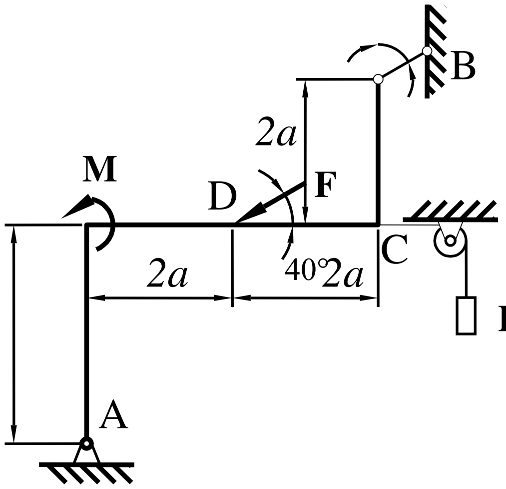


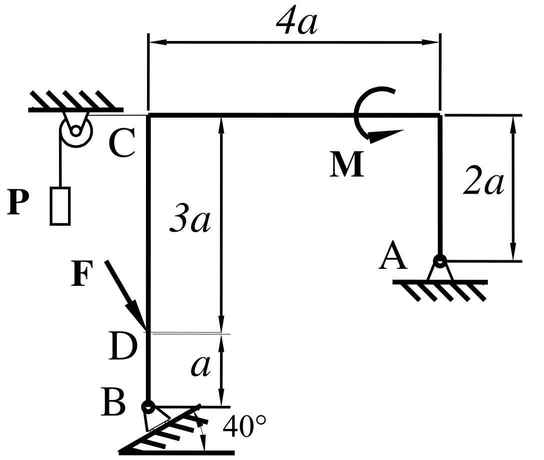
Рис. 6 (начало)

6.4

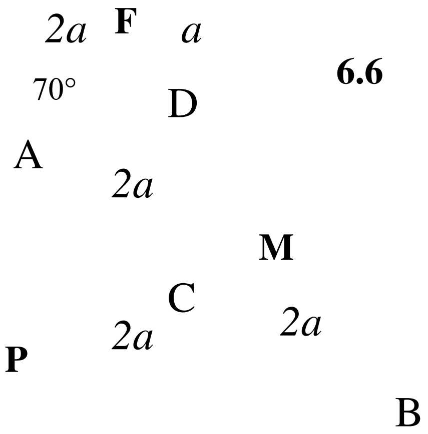
70°

6.5

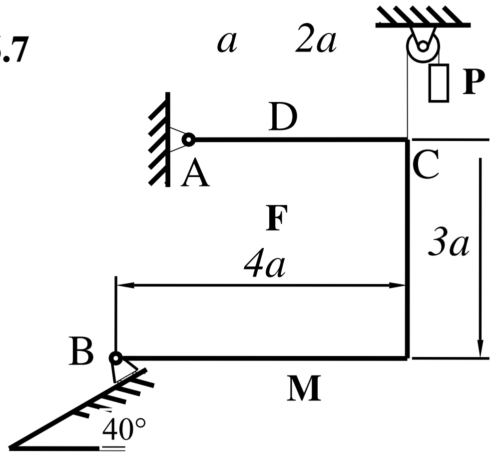




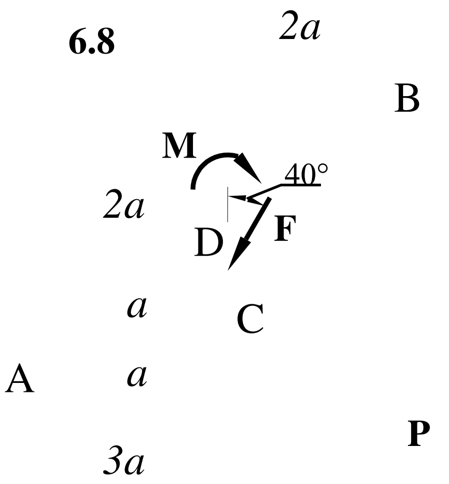
6.6



6.7



6.8



6.9

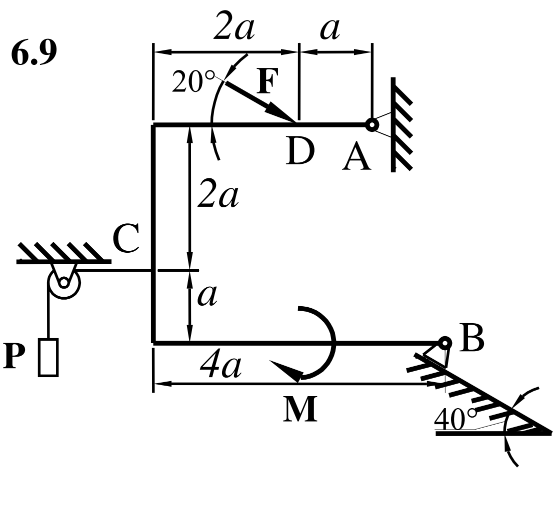


Рис. 6 (продолжение)

Указания. Данная задача - на равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил. При ее решении учесть, что натяжения обеих ветвей нити, перекинутой через блок, когда трением пренебрегают, будут одинаковыми. Уравнение моментов будет более простым (содержать меньше неизвестных), если моменты брать относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей. При вычислении момента силы F часто удобно разложить ее на составляющие F' и F'', для которых плечи легко определяются, и воспользоваться теоремой Вариньона; тогда $m_0(F) = m_0(F') + m_0(F'')$.

Пример решения задачи 2

Жесткая пластина $ABCD$ (рис. 7) имеет в точке A неподвижную шарнирную опору, а в точке B — подвижную шарнирную опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке. Исходные данные: $F=25$ *кН*, $\alpha=60°$, $P= 18$ *кН*, $\gamma = 75°$, $M=50$ *кН·м*, $\beta = 30°$, $a = 0{,}5$ *м*. Определить реакции в точках A и B, вызываемые действующими нагрузками.

Решение.

1. Рассмотрим равновесие пластины. Проведем координатные оси xy и изобразим действующие на пластину силы: силу $\overline{F}$, пару сил с моментом M, натяжение троса $\overline{T}$ (по модулю $\overline{T} = \overline{P}$) и реакции связей $\overline{X_A}$, $\overline{Y_A}$, $\overline{R_B}$ (реакцию неподвижной шарнирной опоры A изображаем двумя ее составляющими, реакция шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости).

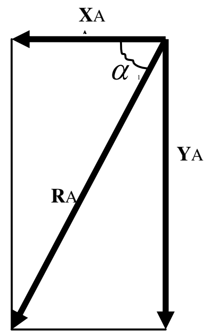
2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы $\overline{F}$ относительно точки А воспользуемся теоремой Вариньона, т. е. разложим силу $\overline{F}$ на составляющие $\overline{F'}$ и $\overline{F''}$ ($F'= F\cdot cos\alpha$, $F'' = Fsin\cdot\alpha$) и учтем, что $m_A(\overline{F}) = m_A(\overline{F'})+m_A(\overline{F''})$. Получим:

$$\sum F_{kX} = 0; X_A + R_B \sin\beta - F\cos\alpha + T\sin\gamma = 0;$$

$$\sum F_{kY} = 0; Y_A + R_B \cos\beta + F\sin\alpha - T\cos\gamma = 0;$$

$$\sum m_A(\overline{F_k}) = 0; M - R_B\cos\beta\cdot 4a + F\cos\alpha\cdot 2a - F\sin\alpha\cdot 3a - T\sin\gamma\cdot 2a = 0.$$

Подставив в составленные уравнения численные значения заданных величин, и решив эти уравнения, определим искомые реакции.



Реакция шарнира $R_a = \sqrt{(x_a^2 + y_a^2)} = \sqrt{(8{,}5^2 + 23{,}3^2)} = 24{,}80$ кН.

$\alpha_1 = arctg(y_A/x_A) = arctg(23{,}3/8{,}5) = 69{,}96^o$

Ответ: $X_A = -8{,}5$ *кН*; $Y_A = -23{,}3$ *кН*; $R_в = 7{,}3$ *кН*. Знаки указывают, что силы X_A и Y_A направлены противоположно показанным на рис. 7.

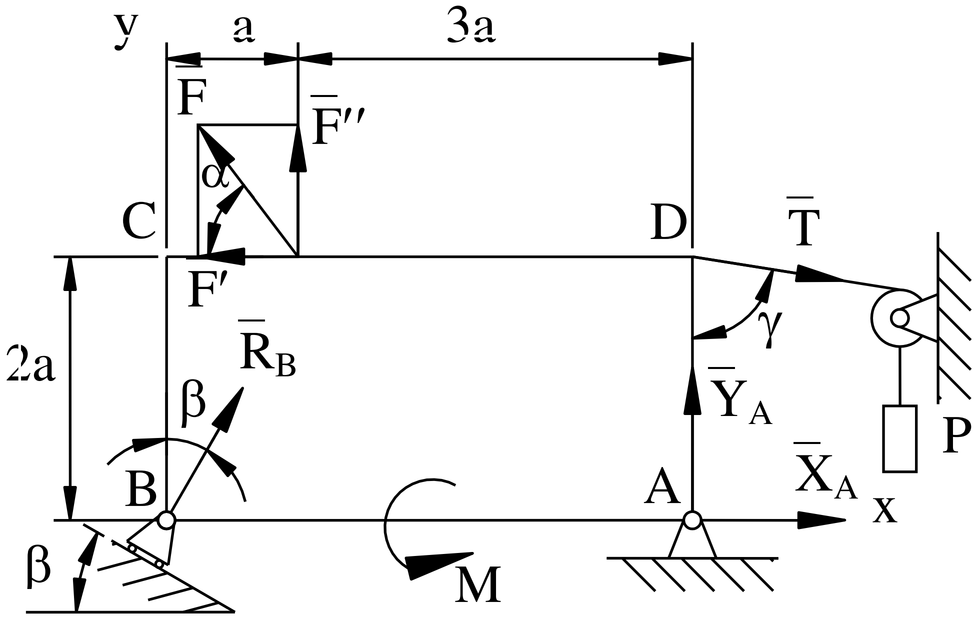


Рис. 7

ЗАДАНИЕ 3

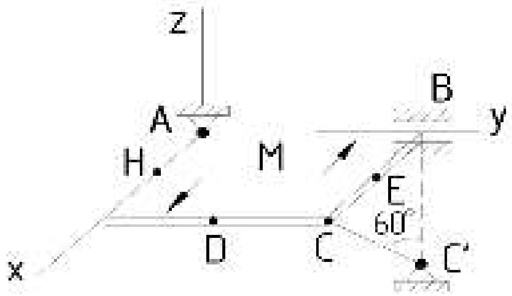
Тема: Равновесие пространственной системы сил.

Однородная прямоугольная плита весом P = 3 кН со сторонами AB = 3L, BC= 2L закреплена в точке A сферическим шарниром, а в точке B цилиндрическим шарниром (подшипником) и удерживается в равновесии невесомым стержнем CC1(рис.8.0-8.9).

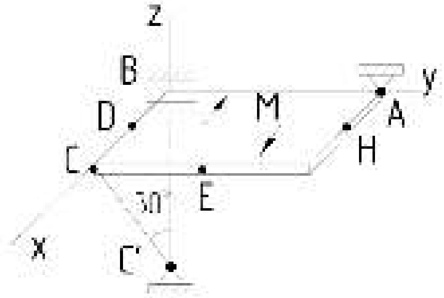
На плиту действуют пара сил с моментом M=5кН*м, лежащая в плоскости плиты, и две силы. Величины этих сил, их направления и точки приложения указаны в табл.3. Точки приложения сил (D,E,H) находятся в серединах сторон плиты. Определить реакции связей в точках A,B,C. При подсчетах принять L = 1.5 м.

Указания. Реакция сферического шарнира (подпятника) имеет три составляющие, а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) – две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При вычислении моментов силу F необходимо разложить на ее составляющие по осям, если угол α не равен 0° или 90°. Тогда по теореме Вариньона $m_x(\overline{F}) = m_x(\overline{F'})+m_x(\overline{F''})$ и т.д.

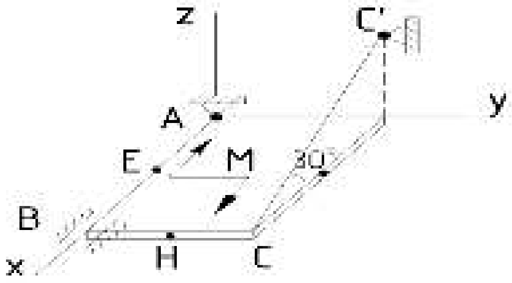
8.1



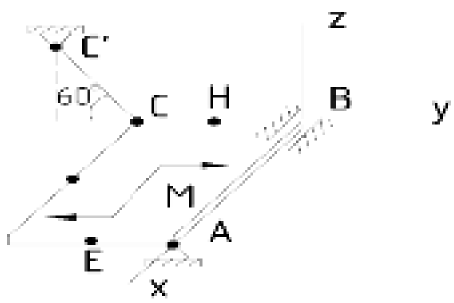
8.2



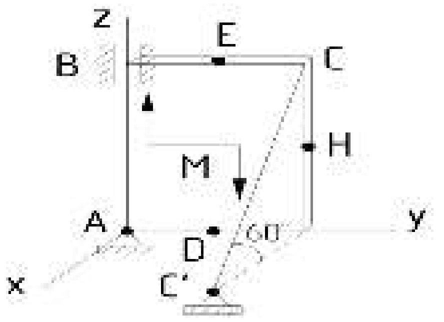
8.3



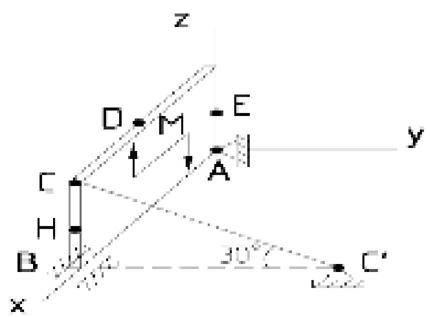
8.4



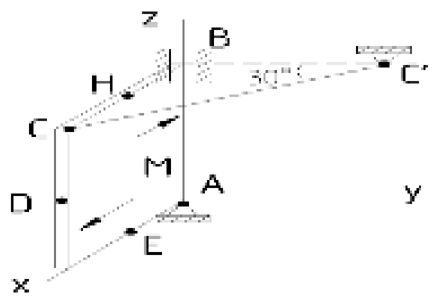
8.5



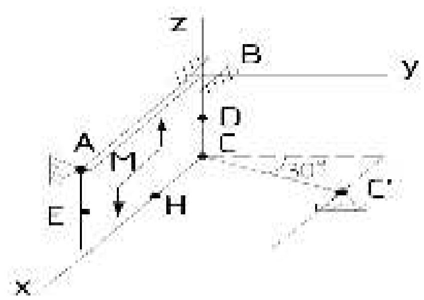
8.6



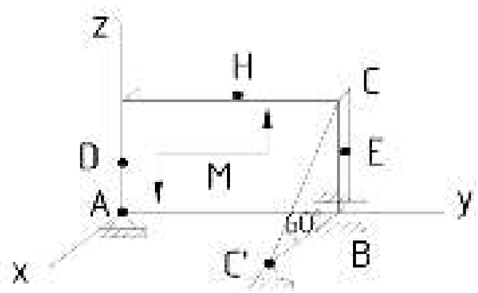
8.7



8.8



8.9



8.0

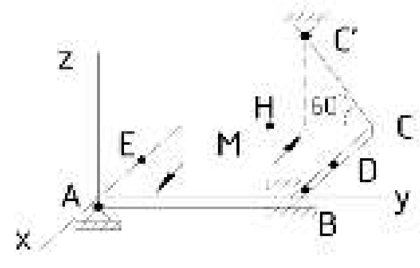
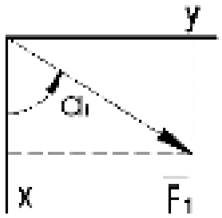
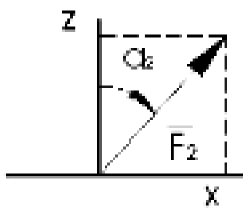
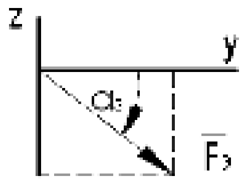
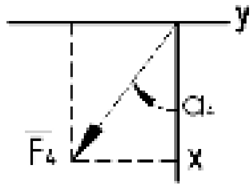


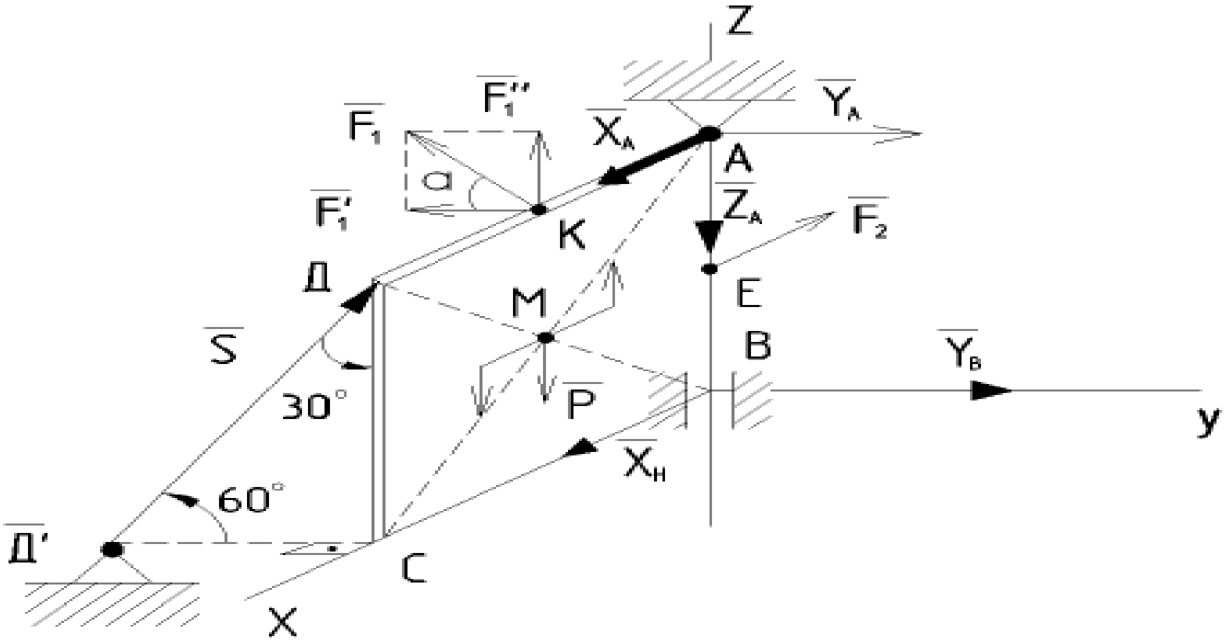
Рис. 8

Номер условия	Сила							
	F_1=4кН		F_2=6кН		F_3=8кН		F_4=10кН	
								
	Точка приложения	α_1, град	Точка приложения	α_2, град	Точка приложения	α_3, град	Точка приложения	α_4, град
0	D	60	–	–	E	20	–	–
1	H	70	D	30	–	–	–	–
2	–	–	E	60	–	–	D	70
3	–	–	–	–	E	30	H	20
4	E	40	–	–	H	60	–	–
5	–	–	D	60	H	20	–	–
6	–	–	H	50	–	–	D	90
7	E	30	H	90	–	–	–	–
8	–	–	–	–	D	0	E	60
9	–	–	E	90	D	30	D	–

Пример. Вертикальная прямоугольная плита весом Р (рис.9) закреплена сферическим шарниром в точке А, подшипником в точке В и невесомым стержнем ДД′, лежащим в плоскости, параллельной плоскости yz. На плиту действует сила F_1 (в плоскости yz), сила F_2 (параллельная оси x) и пара сил с моментом М (в плоскости плиты).

Дано: Р = 5кН; М = 3кН*м; F_1 = 6кН; α=30°; АВ =1м; ВС = 2м; СЕ = 0,5АВ; ВК = 0,5ВС.

Определить: реакции опор А,В и стержня ДД′. Рис.9



Решение:

1. Рассмотрим равновесие плиты. На нее действуют заданные силы P, F_1, F_2 и пара сил с моментом М, а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие: X_A, Y_A, Z_A, подшипника – на две составляющие: X_B, $У_B$ (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника), реакцию $S_Д$ стержня направим вдоль стержня, предполагая, что он сжат.
2. Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил:

$$\Sigma F_{кx} = X_A + X_B - F_2 = 0 \quad (1);$$
$$\Sigma F_{кy} = Y_A + Y_B - F_1 \cos\alpha + S_Д \sin 30° = 0 \quad (2);$$
$$\Sigma F_{кz} = - Z_A + S_Д \cos 30° + F_1 \sin\alpha – P = 0 \quad (3);$$
$$\Sigma m_x(F_к) = -S_Д \sin 30° \, AB + F_1 \cos\alpha \, AB – Y_A \, AB = 0 \quad (4);$$
$$\Sigma m_y(F_К) = - S_Д \cos 30° BC - F_1 \sin\alpha \, 0{,}5 \, BC + X_A \, AB - F_2 \, 0{,}5 \, AB + P \, 0{,}5 \, BC + M = 0 \quad (5);$$
$$\Sigma m_z(F_К) = S_Д \sin 30° \, BC – F_1 \cos\alpha \, 0{,}5 \, BC = 0 \quad (6).$$

Подставим численные данные и найдем решение.

Из уравнения (6)

$$S_Д = (F_1 \cos\alpha \, 0{,}5 \, BC) / (\sin 30° \, BC) = (6 \cos 30° \times 0{,}5 \times 2)/(\sin 30° \times 2) = 5{,}20 \text{ кН};$$

Из уравнения (5)

$$X_A = (S_Д \cos 30° BC + F_1 \sin\alpha \, 0{,}5 \, BC + F_2 \times 0{,}5 \, AB - P \, 0{,}5 \, BC – M)/AB = (5{,}20 \cos 30° \times 2 + 6 \sin 30° \times 0{,}5 \times 2 + 7{,}5 \times 0{,}5 \times 1 - 5 \times 0{,}5 \times 2 – 3)/1 = 7{,}75 \text{ кН};$$

Из уравнения (1)

$$X_B = - X_B + F_2 = -7{,}75 + 7{,}5 = -0{,}25 \text{ кН};$$

Из уравнения (3)

$$Z_A = S_Д \cos 30° + F_1 \sin\alpha – P = 5{,}20 \cos 30° + 6 \sin 30° - 5 = 2{,}50 \text{ кН};$$

Из уравнения (4)

$$Y_A = (-S_Д \sin 30° \, AB + F_1 \cos\alpha \, AB)/AB = (-5{,}20 \sin 30° \times 1 + 6 \cos 30° \times 1)/1 = 2{,}60 \text{кН};$$

Из уравнения (2)

$$Y_B = -Y_A + F_1 \cos\alpha - S_Д \sin 30° = - 2{,}60 + 6 \cos 30° - 5{,}20 \sin 30° = 0{,}0$$

Ответ: $X_A = 7{,}75$ кН; $Y_A = 2{,}60$кН; $Z_A = 2{,}50$ кН; $X_B = -0{,}25$ кН; $Y_B = 0$; $S_Д = 5{,}20$ кН.

Найдем реакции в шарнирах:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = \sqrt{7{,}75^2 + 2{,}60^2 + 2{,}50^2} = 8{,}55 \text{кН}; \quad R_B = |X_B| = 0{,}25 \text{кН}.$$

Знак "-" показывает, что данная сила направлена в обратном направлении.

ЗАДАНИЕ 4

Тема : Центр тяжести однородной пластины.

Определить центр тяжести однородной пластины. Данные взять из табл.4. Изображение пластины – рис.10. Центр тяжести пластины определяется следующим образом:

$X_п = (\Sigma S_i X_i)/S$; $Y_п = (\Sigma S_i Y_i)/S$.

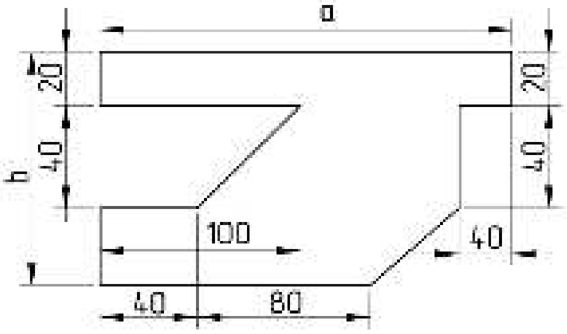
Где $X_п$, $Y_п$ -- координаты центра тяжести пластины; S – площадь пластины; X_i, Y_i -- координаты центра тяжести элемента; S_i – площадь элемента. Центр тяжести прямоугольника находится на пересечении диагоналей, центр тяжести треугольника – на пересечении медиан.

Таблица 4

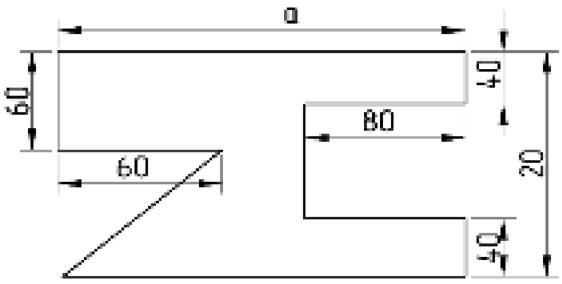
Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
а,мм	350	360	370	375	380	385	390	395	400	345
в,мм	310	320	350	360	315	340	330	320	350	400

Примечание. Рисунки выполнять в масштабе, согласно исходных данных.

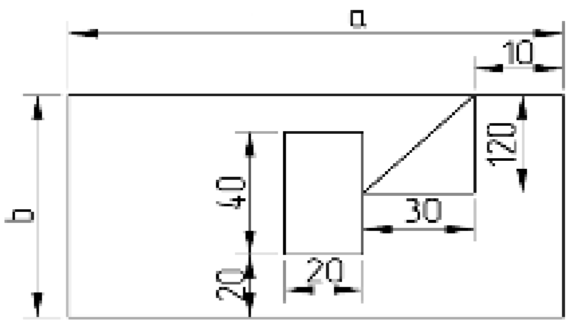
10.0



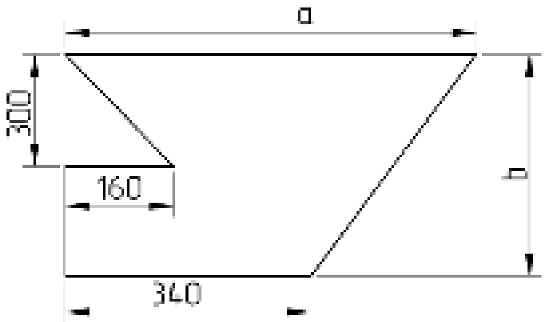
10.1



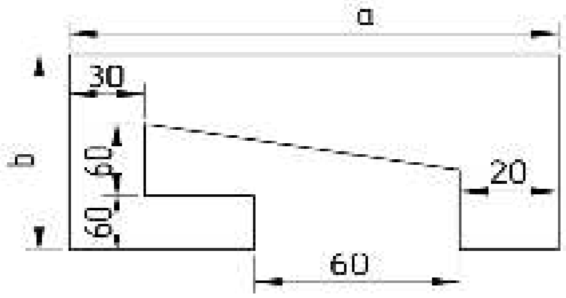
10.2



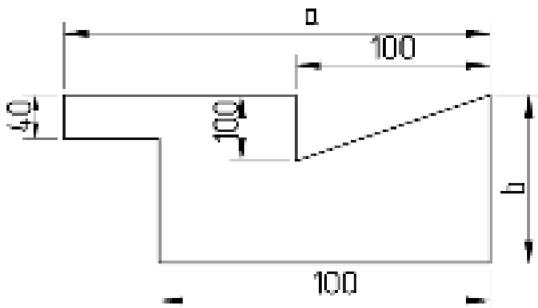
10.3



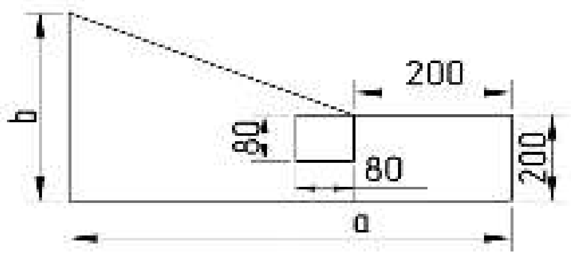
10.4



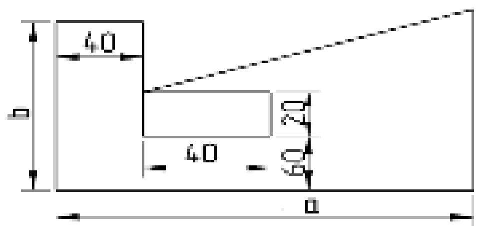
10.5



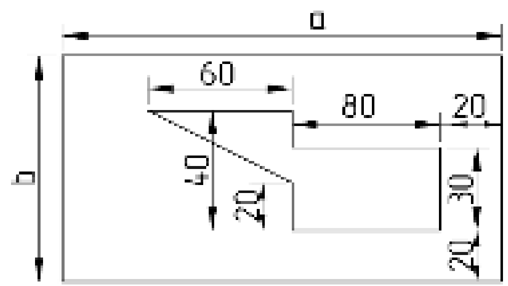
10.6



10.7



10.8



10.9

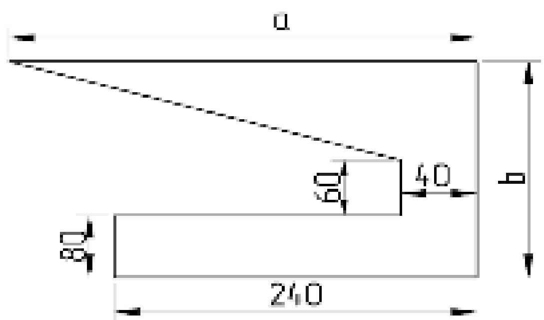


Рис. 10

Пример решения задания 4.

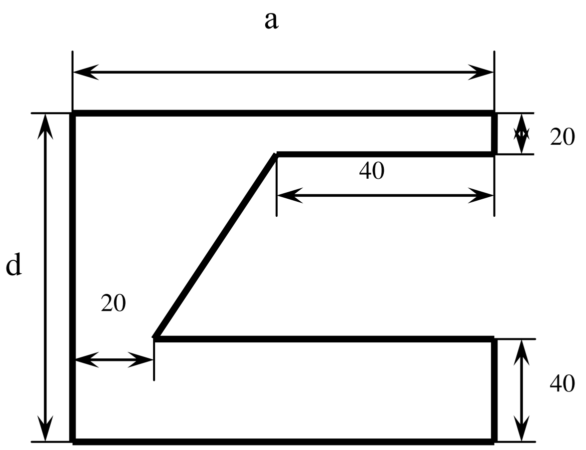


Рис. 11а

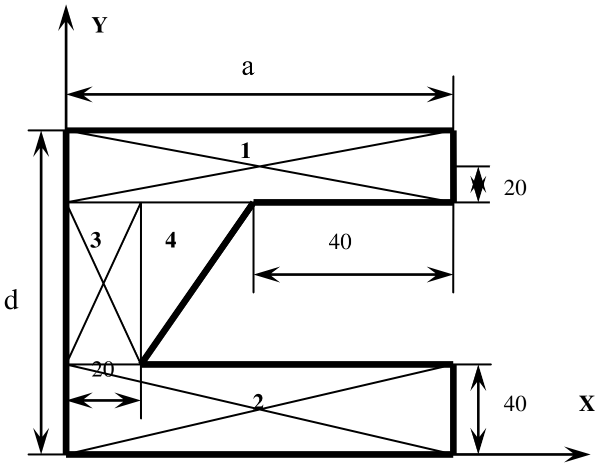


Рис. 11б

Дано: а = 200мм; в = 150мм.

1. Разобьем пластину на отдельные элементы и обозначим их 1,2,3,4.
2. Проведем оси X и У.
3. Площади элементов: $S_1 = 200 \times 20 = 4000$мм²; $S_2 = 200 \times 40 = 8000$мм²; $S_3 = (150 - 20 - 40) \times 20 = 1800$мм²; $S_4 = (150 - 20 - 40) \times (200 - 20 - 40) \times 0{,}5 =$ $=6300$мм².

4. Центры тяжести элементов: а) $X_1 = 100$мм²; $У_1 = 150\text{-}10 = 140$мм. б) $X_2 = 100$мм; $У_2 = 20$мм. в) $X_3 = 10$мм; $У_3 = (в - 20 - 40) \times 0{,}5 - 40 = 95$мм.

5.Определение центра тяжести треугольника рассмотрим отдельно.

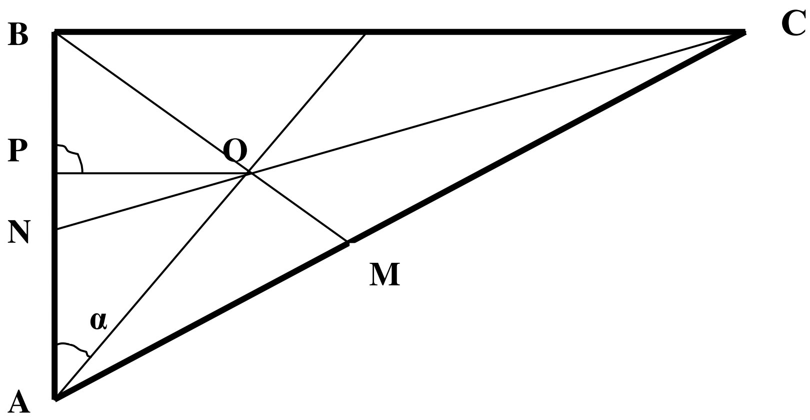


Рис. 11в

ВС = 140мм; АВ = 90мм; АК, ВМ и СN – медианы. ВК = 0,5ВС. ОР – перпендикуляр к АВ. $АК = \sqrt{[(ВК)^2 + (АВ)^2]} = \sqrt{(70^2 + 90^2)} = 118{,}3$мм; АО = (2/3) АК= =78,9мм; ВК/АК = РО/АО = sinα; РО = (ВК×АО)/АК = 70×78,9÷118,3 = =46,7мм; $АР = \sqrt{[(АО^2) - (РО)^2]} = \sqrt{(78{,}9^2 - 46{,}7^2)} = 63{,}6$мм; $X_4 = 20 + РО =$ $= 66{,}7$мм; $У_4 = 40 + АР = 103{,}6$мм.

6. Площадь пластины: $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 4000+8000+1800+6300=$ $= 20100$мм².

7. Центр тяжести пластины: $X_п = (X_1S_1 + X_2S_2 + X_3S_3 + X_4S_4)/S =$ $=(100\times4000 + 100\times8000 + 10\times1800 + 66{,}6\times6300/20100 = 81{,}5$мм; $У_п = (Y_1S_1 +$ $+Y_2S_2 + Y_3S_3 + Y_4S_4)/S = (140\times4000 + 20\times8000 + 95\times1800 + 103{,}6\times$ $\times6300)/20100 = 76{,}8$мм.

РАЗДЕЛ II. КИНЕМАТИКА

Общие методические указания к решению задач по кинематике

Кинематика – это раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета сил, вызывающих это движение.

Под **движением** понимается перемещение тела в пространстве с течением времени. Изменение положения тела в пространстве фиксируется в некоторой системе отсчета от некоторого начального момента времени.

Задать движение тела (точки) означает получить такие математические зависимости, которые позволят знать положение точки в пространстве в любой момент времени.

Зная законы движения тела (точки), можно решить **основную задачу кинематики**: определить все кинематические величины (траекторию, скорости, ускорения), характеризующие как движение тела в целом, так и каждой его точки в отдельности.

ЗАДАНИЕ 1

Тема: Плоско-параллельное движение твердого тела.

Ведущее звено OA = r (рис.1.0 – 1.5) вращается с постоянной угловой скоростью ω, поршни B и C движутся вдоль прямолинейных направляющих, шатуны AB и AC имеют одинаковую длину AB = AC = L. Положение механизма определяется параметрами φ,**a** или φ,α. Все подвижные звенья движутся в плоскости чертежа. Определить скорости точек B и C, а также угловые скорости всех звеньев механизма. Данные для расчета взять в табл. 1а.

Таблица 1а

Вариант	ω,1/с	r,м	L,M	**a,**м	φ,град	α,град
0	200	0,10	0,25	0,04	30	45
1	210	0,12	0,30	0,05	45	30
2	220	0,10	0,25	0,04	60	45
3	230	0,14	0,35	0,05	30	60
4	240	0,12	0,25	0,04	45	30
5	250	0,14	0,35	0,05	60	45
6	210	0,10	0,25	0,04	30	60
7	220	0,12	0,30	0,05	45	30
8	230	0,10	0,25	0,04	60	45
9	240	0,12	0,30	0,05	30	60

Ведущее звено OA = r (рис1.6 – 1.9) вращается с угловой скоростью ω. Длины других звеньев механизма следует определить по рисункам в зависимости от величины r для каждого варианта. Положение механизма определяется параметром φ и другими указанными на рисунках углами. Определить скорости точек B и D, а также угловые скорости всех звеньев механизма. Данные для расчета взять в табл.1б.

Таблица 1б

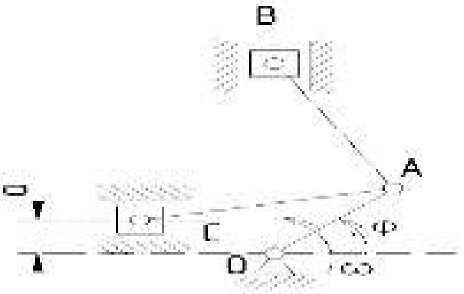
Условие	ω,1/с	r,м	φ,град
0	2	0,10	15
1	3	0,12	30
2	4	0,10	45
3	5	0,14	15
4	6	0,12	30
5	6	0,14	45
6	5	0,10	15
7	3	0,12	30
8	2	0,10	45
9	4	0,12	15

Указания:

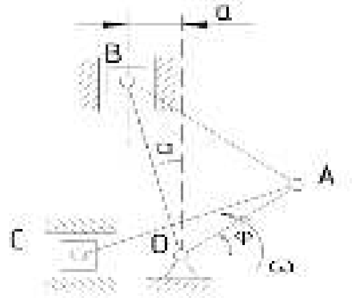
а) схема механизма вычерчивается в масштабе,

б) расстояние от точки механизма до мгновенного центра скорости можно вычислить с помощью геометрических построений

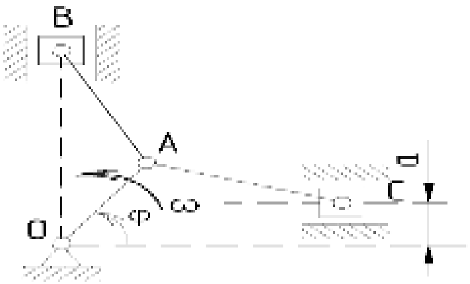
1.0



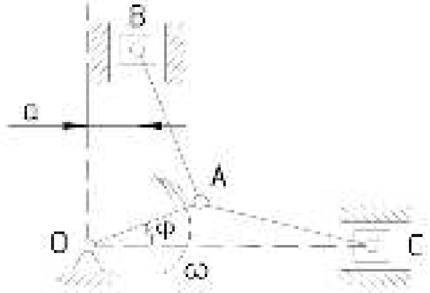
1.1



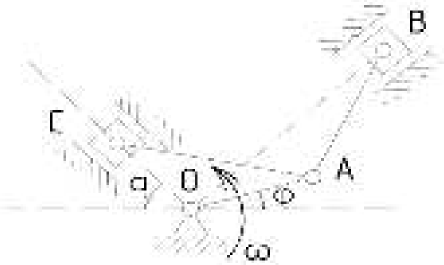
1.2



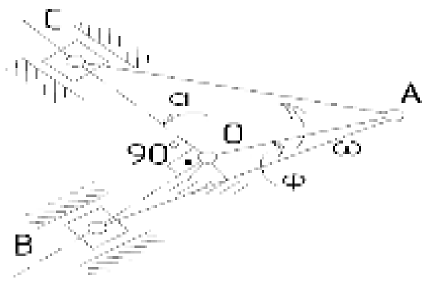
1.3



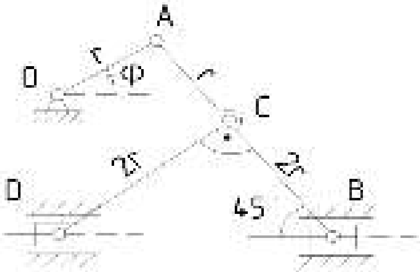
1.4



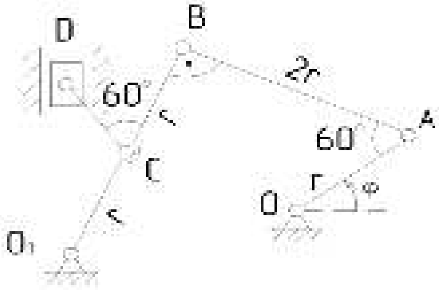
1.5



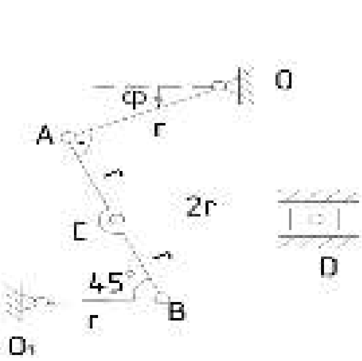
1.6



1.7



1.8



1.9

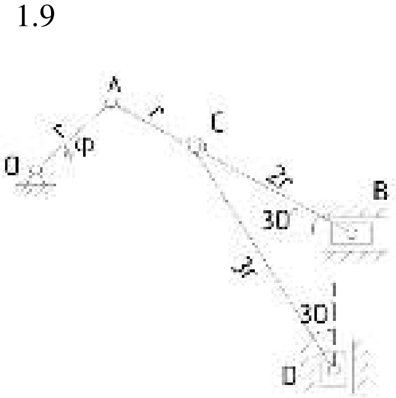


Рис. 1.

Пример решения задания 1.

Дана схема плоского механизма, изображенная на рис. 2. Кривошип O_1A имеет угловую скорость $\omega = 2\ сек^{-1}$. Положение кривошипа определяется углом поворота $\varphi = 225\ °$, размеры звеньев: $O_1A = 50\ см$, $AB = 120\ см$, $O_2B = 40\ см$, $O_1O_2 = 100\ см$, $CD = 100\ см$, $O_2C = 80\ см$. Определить линейные скорости точек A, B, C, D и угловые скорости всех звеньев механизма.

Способ 1. Рассматриваемый механизм состоит из следующих звеньев:

- кривошипа O_1A, вращающегося вокруг точки O_1
- шатуна AB, совершающего плоское движение
- коромысла BC, вращающегося вокруг точки O_2
- шатуна CD, совершающего плоское движение
- ползуна D, движущегося горизонтально.

Скорость точки A определяется из условия вращательного движения:

$$\upsilon_A = \omega \cdot O_1A = 2 \cdot 50 = 100\ см/с$$

Вектор скорости $\overline{\upsilon_A}$ направлен перпендикулярно кривошипу O_1A в сторону вращения.

Для определения скорости точки B рассмотрим плоское движение шатуна AB, для которого известны; скорость точки A по величине и скорость точки B направлению (точка B принадлежит одновременно коромыслу BC, а поскольку коромысло совершает поворот вокруг точки O_2 то скорость $\overline{\upsilon_B}$ должна быть перпендикулярна O_2B).

Найдем для звена AB положение мгновенного центра опростей P_{AB}, который будет находится на пересечении перпендикуляров к направлению скоростей в точках A и B.

Расстояние $P_{AB}A$ можно найти с помощью геометрических построений или взять из схемы с учетом масштаба построения 1:20.

$$P_{AB}A = 108см$$

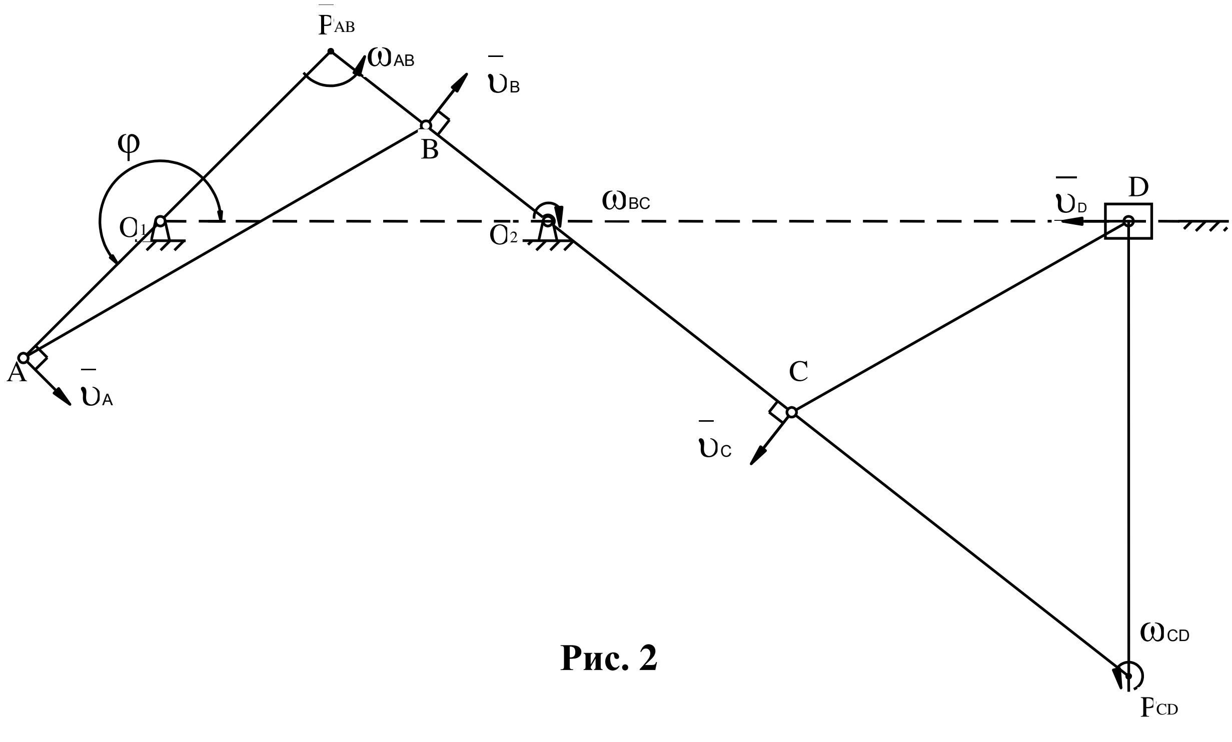


Рис. 2

Определяем угловую скорость шатуна *AB*:

$$\omega_{AB} = \frac{\upsilon_A}{P_{AB}A} = \frac{100}{108} = 0{,}925\ c^{-1}$$

Угловая скорость ω_{AB} направлена против часовой стрелки.

Для определения линейной скорости точки *B* необходимо знать расстояние $P_{AB}B$, которое по схеме в масштабе составляет *30 см*.

$$\upsilon_B = \omega_{AB} \cdot P_{AB}B = 0{,}925 \cdot 30 = 27{,}8\ см/с$$

Направление вектора скорости должно соответствовать направлению угловой скорости $\overline{\upsilon_B}$ должно соответствовать направлению угловой скорости.

Определяем угловую скорость звена *BC* из условия, что точка *B* вращается вокруг точки O_2:

$$\omega_{BC} = \frac{\upsilon_B}{O_2B} = \frac{27{,}8}{40} = 0{,}695\ c^{-1}$$ (по часовой стрелке).

Из условия вращения точки *C* вокруг точки O_2 находим ее линейную скорость:

$$\upsilon_C = \omega_{BC} \cdot O_2C = 0{,}695 \cdot 80 = 55{,}6\ см/с$$

Определяем кинематические характеристики шатуна *CD*, совершающего плоское движение. Для этого звена известны: скорость точки *C* по величине и направлению, скорость точки *D* по направлению (точка *D* принадлежит одновременно ползуну, совершающему горизонтальное движение, следовательно и скорость $\overline{\upsilon_D}$ должна быть направлена горизонтально.

Положение мгновенного центра скоростей P_{CD} определяется пересечением перпендикуляров к направлению скоростей в точках *C* и *D*.
Угловая скорость этого звена определяется:

$$\omega_{CD} = \frac{\upsilon_C}{P_{CD}C} = \frac{55{,}6}{106} = 0{,}525\ c^{-1}$$ (против часовой стрелки)

Расстояние $P_{CD}C$ определено по схеме.
Линейная скорость точки D:

$$\upsilon_D = \omega_{CD} \cdot P_{CD}D = 0{,}525 \cdot 117 = 61{,}5\ см/с$$

Скорость $\overline{\upsilon_D}$ направлена горизонтально влево в соответствии с направлением угловой скорости для звена DC. Найдены характеристики скоростей для всех элементов заданного механизма. Следовательно, задача решена.

ЗАДАНИЕ 2.
Тема: Кинематика материальной точки на плоскости.

Движение точки в плоскости xy задано уравнениями $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$ (табл. 2а,2б). Найти и изобразить траекторию точки, то есть линию, которую точка описывает при своем движении, считая, что движение начинается в момент времени $t = 0$. Определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорение в моменты времени $t = 0$, $t = 1$с и радиусы кривизны в соответствующей точке в эти же моменты времени. Данные взять из табл.2а,2б.

Таблица 2а

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x = f_1(t)$	4cos(πt/6)	2-4cos(πt/6)	2cos(πt/6)-3	4-2t	2-t	2t	t-4	8sin(πt/6)-2	2sin(πt/6)	2-4sin(πt/6)

Примечание. x – первая цифра варианта, y – вторая цифра варианта. Для вариантов 00-29 $y = f_2(t)$ взять из столбца 2 табл.2б. Для вариантов 30-69 $y = f_2(t)$ взять из столбца 3 табл.2б. Для вариантов 70-99 $y = f_2(t)$ взять из столбца 4 табл.2б.

Таблица 2б

Вариант	Для вариантов от 00 до 29	Для вариантов от 30 до 69	Для вариантов от 70 до 99
Столбец 1	Столбец 2	Столбец 3	Столбец 4
0	12sin(πt/6)	$2t^2 + 2$	4cos(πt/6) - 2
1	4 – 6cos(πt/3)	8sin(πt/4)	14 – 16cos(πt/6)
2	$-3\sin^2(\pi t/6)$	$(2 + t)^2$	4cos(πt/3)
3	9sin(πt/6) - 4	$2t^3$	-10cos(πt/6)
4	4cos(πt/3) - 2	2 + 2cos(πt/4)	$-4\cos^2(\pi t/6)$
5	-10sin(πt/6)	$2 – 3t^2$	8 – 12cos(πt/3)
6	$2 – 6\sin^2(\pi t/6)$	2 – 2sin(πt/6)	3cos(πt/6)
7	2sin(πt/6) - 2	$(t + 1)^3$	6 – 8cos(πt/3)
8	8cos(πt/3) + 5	$2 - t^3$	9cos(πt/6) - 3
9	3 – 8sin(πt/6)	4cos(πt/4)	-6cos(πt/3)

Указания. Задание 2 относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяется скорость и ускорение точки в декартовых координатах, а также формул, по которым определяется касательное и нормальное ускорение точки. При расчетах следует учесть знакомые тригонометрические формулы:

$\mathrm{Cos}2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$; $\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Пример решения задания 2.

Дано: Уравнения движения точки в плоскости xy: $x = 4 - \sin(\pi t/3)$; $y = 2 - 3\cos^2(\pi t/6)$, где x,y – в сантиметрах, t – в секундах.

Определить: уравнение траектории точки; для моментов времени t = 0 и t = =1с найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиусы кривизны. Показать векторы скорости и ускорения.

1. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t, тогда y = f(x). Обозначим $\pi t/6 = \alpha$; $\pi t/3 = 2\alpha$; тогда $x = 4 - \sin2\alpha$ (1); $y = 2 - 3\cos^2\alpha = 2 - 3 + 3\sin^2\alpha = -1 + 3(1 - \cos2\alpha)/2 = 0{,}5 - 1{,}5\cos2\alpha$ (2). Из (1) $\sin2\alpha = 4 - x$; из (2) $\cos2\alpha = (0{,}5 - y)/1{,}5$.

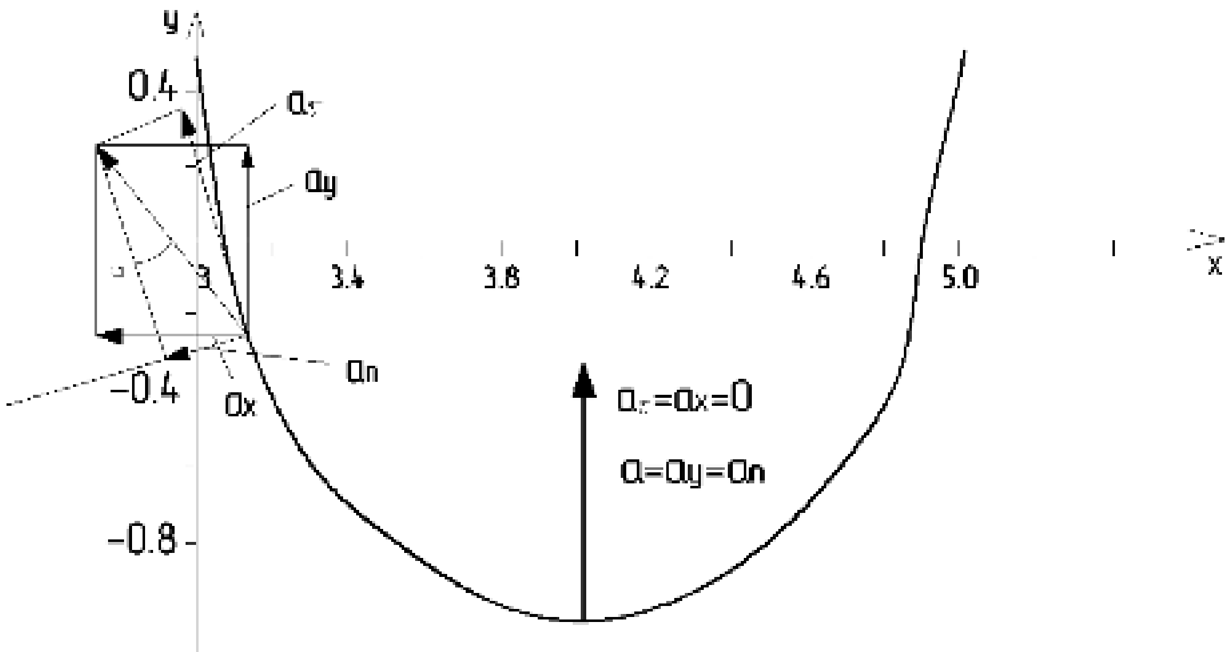
Воспользуемся формулой : $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1 = (4 - x)^2 + [(0{,}5 - y)/1.5]^2$.

$[(0{,}5 - y)/1.5]^2 = 1 - (4 - x)^2$; $(0{,}5 - y)/1.5 = \sqrt{[1 - (4 - x)^2]}$; $y = 0{,}5-\sqrt{[1- (4- x)^2]}$;

2. Для построения траектории точки составим таблицу.

Таблица 3

x	3,0	3,2	3,4	3,6	4,0	4,4	4,6	4,8	5,0
y	0,5	-0,4	-0,7	-0,87	-1	-0,87	-0,7	-0,4	0,5



3. Определим положение точки: *а)* t = 0, x = 4 – sin0 = 4см, $y = 2 - 3\cos^2 0 = -1$см; б) t = 1с, $x = 4 - \sin(\pi\times1/3) = 3{,}13$см, $y = 4 - 3\cos^2(\pi\times1/6) = -0{,}25$см.

4. Скорость точки: $v_x = x' = (-\pi/3)\cos(\pi t/3)$; $v_y = y' = -3\times2\cos(\pi t/6)\times$

$\times[-\sin(\pi t/6)]\times\pi/6 = (\pi/2)\sin(\pi t/3)$. *а)* $t = 0$; $v_x = -1{,}050$см/с; $v_y = 0$; $v = |v_x| =$ $=1{,}050$см/с. б) $t = 1$с ; $v_x = -0{,}52$см/с; $v_y = 1{,}36$см/с; $v = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2)} =$ $= \sqrt{(0{,}52^2 + 1{,}36^2)} = 1{,}46$см/с.

5. Ускорение точки: $a_x = v_x' = (\pi/3)\ (\pi/3)\sin(\pi t/3) = (\pi^2/9)\ \sin(\pi t/3)$; $a_y =$ $=(\pi/2)(\pi/3)\cos(\pi t/3) = (\pi^2/6)\ \cos(\pi t/3)$. *а)* $t = 0$; $a_x = 0$; $a_y = 1{,}64$см/с; $a =$ $= \sqrt{(a_x^2 + a_y^2)} = a_y = 1{,}64$см/с; б) $t = 1$с; $a_x = -0{,}95$см/с; $a_y = 0{,}82$см/с; $a =$ $= \sqrt{(a_x^2 + a_y^2)} = \sqrt{(0{,}95^2 + 0{,}82^2)} = 1{,}25$см/с.

6. Нормальное и касательное ускорения.

$v^2 = v_x^2 + v_y^2$ (3) Продифференцируем (3) .

$2vv' = 2v_xv_x' + 2v_y v_y' = 2v_x a_x + 2v_y a_y$; $v' = a_\tau = (v_x a_x + v_y a_y)/v$, где a_τ - касательное ускорение. *а)* $t = 0$, $a_\tau = a_x = 0$; $a_n = a_y = a = 1{,}64$см/с, где a_n – нормальное ускорение; б) $t = 1$с, $a_\tau = [(-0{,}52)(-0{,}95) + 1{,}36\times0{,}82]/1{,}46 =$ $=1{,}10$см/с; $a_n = \sqrt{(a^2 - a_\tau^2)} = \sqrt{(1{,}25^2 - 1{,}10^2)} = 0{,}59$см/с.

7. Радиус кривизны.

$\rho = v^2/a_n$, *а)* $t = 0$, $\rho = 1{,}05^2/1{,}64 = 0{,}67$см; б) $t = 1$с, $\rho = 1{,}46^2/0{,}59 = 3{,}61$см.

РАЗДЕЛ III. ДИНАМИКА

Общие методические указания к решению задач по динамике

Динамика – это раздел механики, в котором изучается движение материальных тел под действием сил.

Для изучения динамики надо уметь находить интегралы (неопределенные и определенные) от простейших функций, вычислять частные производные и полный дифференциал функций нескольких переменных, а также уметь интегрировать дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными и линейные дифференциальные уравнения второго порядка (однородные и неоднородные) с постоянными коэффициентами.

ЗАДАНИЕ 1.

Тема :Определение закона движения материальных тел.

Задача 1.

Груз 1 массой *m* укреплен на пружинной подвеске в лифте (рис.1.0-1.9). Лифт движется вертикально по закону:

$$z = 0{,}5\alpha_1 t^2 + \alpha_2 \sin(\omega t) + \alpha_3\cos(\omega t)\ ,\ \text{м}$$

Ось z направлена по вертикали вверх, время выражено в секундах. На груз действует сила сопротивления среды $R = \mu v$, где v – скорость груза по отношению к лифту.

Найти закон движения груза по отношению к лифту, т.е.

$$x = f(t).$$

Таблица 1

Ва- риант	C_1, Н/м	C_2, Н/м	C_3, Н/м	a_1, м/с²	a_2, м	a_3, м	ω, 1/с	μ, Н×с/м	λ_0, м	v_0, м/с	m, кг	$\lambda_{ст}$, м
0	300	150	-	0	0,1	0	25	0	0	0	0,5	-
1	-	240	120	-1,5g	0	0	-	16	0,1	0	2,0	-
2	-	-	-	0,5g	0,3	0	5	0	0	4	4,0	0,1
3	240	-	160	0	0	0,2	16	0	0	0	1,0	-
4	80	120	-	-g	0	0	-	12	0,15	0	0,5	-
5	-	400	400	0,5g	0	0,15	15	0	0	0	2,0	-
6	-	-	-	g	0	0	-	8	0	2	0,4	0,1
7	120	-	180	0	0,1	0	20	0	0	0	0,5	-
8	50	200	-	0	0	0,12	20	0	0,15	0	0,4	-
9	200	-	300	1,5g	0	0	-	20	0	3	1,0	-

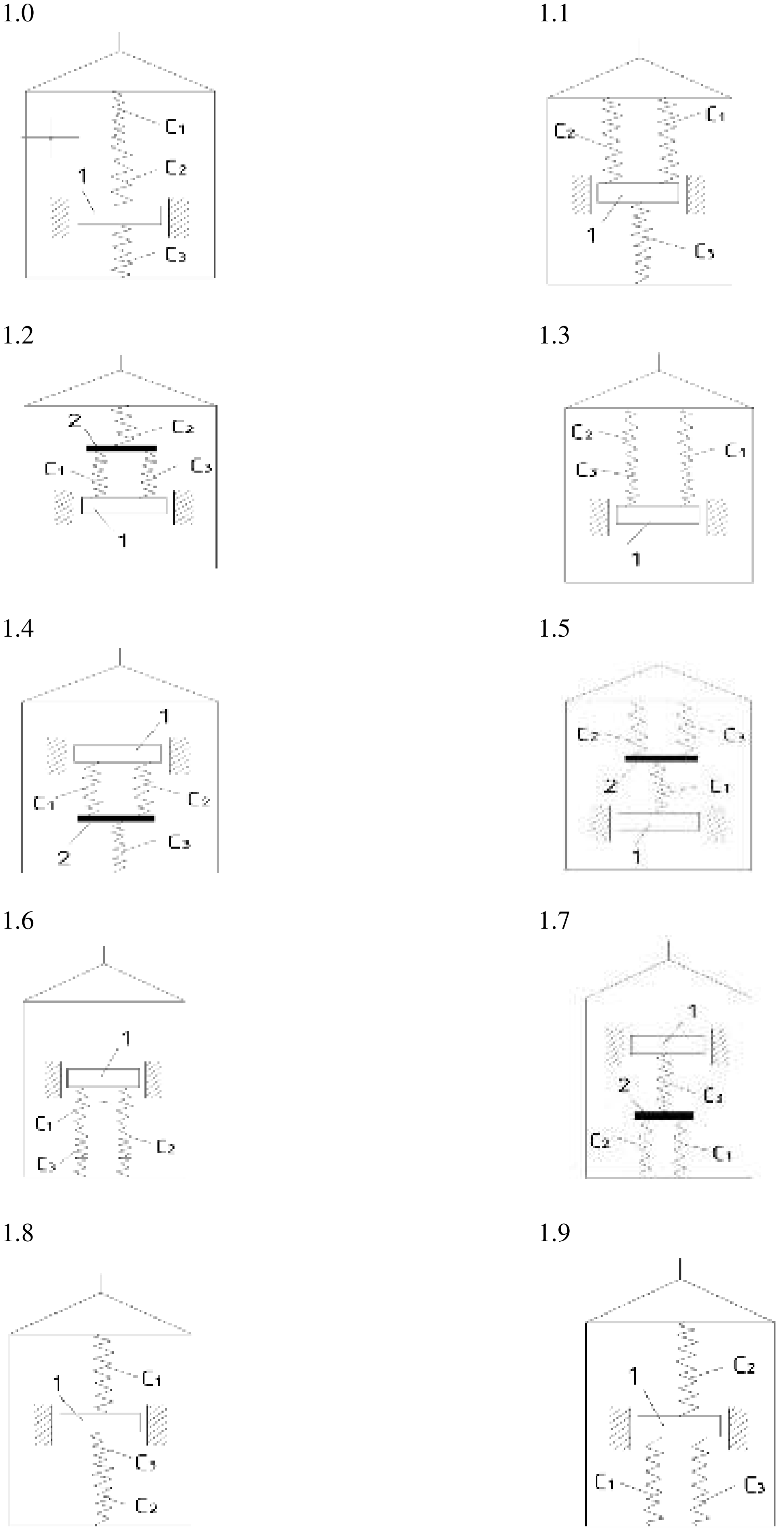

1.0
C1
C2
1
C3
1.1
C1
C2
1
C3
1.2
2
C2
C1
C3
1
1.3
C2
C1
C3
1
1.4
1
C1
C2
2
C3
1.5
C2
C3
2
C1
1
1.6
1
C1
C2
C3
1.7
1
2
C3
C2
C1
1.8
1
C1
C1
C2
1.9
1
C2
C1
C3

Рис. 1

В таблице 1 обозначено: C_1, C_2, C_3 – коэффициенты жесткости пружин, λ_0 – удлинение пружины с эквивалентной жесткостью в начальный момент времени $t = 0$, $\lambda_{ст}$ – статическое удлинение пружины с эквивалентной жесткостью, v_o –начальная скорость груза по отношению к лифту (направлена вертикально вверх). Прочерк в столбцах C_1, C_2, C_3 означает, что соответствующая пружина отсутствует и на чертеже обозначаться не должна. Прочерк во всех столбцах C_1, C_2, C_3 стоит, когда задано $\lambda_{ст}$ (пружину с эквивалентной жесткостью считать в этом случае прикрепленной к потолку лифта). Если при этом конец одной из оставшихся пружин останется свободным, его следует прикрепить в соответствующем месте или к грузу или к потолку (полу) лифта, тоже следует сделать, если свободными окажутся соединенные планкой 2 концы обеих пружин.

Указания:

а) начало координат поместить в положении статического равновесия груза при неподвижном лифте;

б) ось x направить в сторону удлинения пружины;

в) груз изобразить в положении, при котором $x›0$, то есть пружина растянута.

г) при подсчетах можно принять $g = 10м/с^2$.

д) массой пружин и соединительной планки 2 пренебречь;

е) данная задача охватывает одновременно две темы: «Относительное движение материальной точки» и «Прямолинейные колебания материальной точки».

Сначала нужно составить дифференциальное уравнения движения по отношению к лифту рассматриваемого в задаче груза, для чего присоединить к действующим силам переносную силу инерции. При этом заменить подвеску одной пружиной с жесткостью, эквивалентной жесткости подвески. Затем проинтегрировать полученное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, учтя начальные условия.

Пример решения задания 1.

В приборе для измерения вертикальных колебаний (рис.2) груз массой ***m*** прикреплен к пружине с коэффициентом жесткости С. Другой конец пружины прикреплен к корпусу прибора, который движется по закону $z = A\sin(\omega t)$ (неподвижная ось z направлена вертикально вверх). Начальное удлинение пружины равно λ_o , а начальная скорость груза по отношению к корпусу прибора v_o (направлена вертикально вниз).

Дано: $m = 0{,}4$кг, $C = 40$Н/м, $\lambda_o = 0{,}10$м, $v_o = 0{,}5$м/с, $A = 0{,}03$м, $\omega =$
$= 20$ 1/с.

Определить: $\mathbf{x = f(t)}$ – закон движения груза по отношению к корпусу прибора.

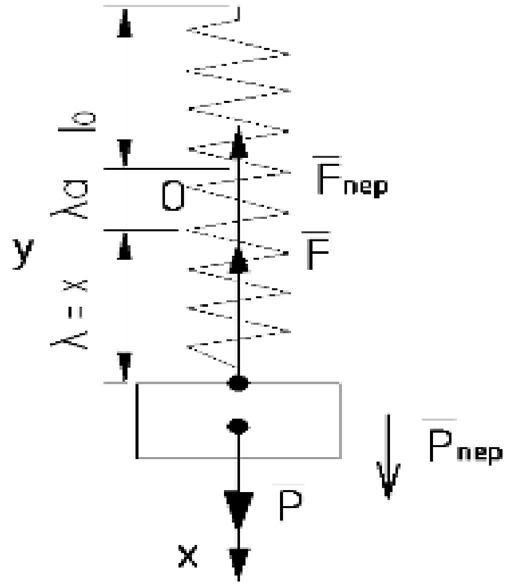


Рис. 2

Решение. 1. Свяжем с корпусом прибора подвижную систему отсчета, начало 0 которой поместим в положении статического равновесия груза, а ось x направим в сторону удлинения пружины (см. рис.2). Рассмотрим груз в положении при котором пружина растянута. На груз действует сила тяжести P и сила упругости F. Для составления уравнения относительного движения груза присоединим к этим силам переносную силу инерции $F_{ин.\,пер} = -ma_{пер.}$ Кориолисова сила инерции равна нулю, так как переносное движение (движение корпуса прибора) является поступательным. Тогда уравнение относительного движения в векторной форме будет иметь вид:

$$ma_{отн} = P + F + F_{ин.\,пер} \quad !!!$$

Проектируя обе части уравнения на ось X, получим:

$$mx'' = P_x + F_x + F_{ин.\,пер\,x} \qquad (1)$$

здесь $P = P_x$, $F_x = -C(\lambda_{ст} + x)$, где $(\lambda_{ст} + x)$ – суммарное удлинение пружины. Учитывая, что оси x и z направлены в разные стороны, и определив

$$a_{пер\,z} = z'' = -A\omega^2\sin(\omega),\text{ получим}$$

$$F_{ин.\,пер\,x} = -mA\omega^2\sin(\omega).$$

В данной задаче переносное ускорение направлено против оси Z, А переносная сила инерции направлена против оси X.

Подставляя все найденные выражения проекций сил в уравнение (1), получим:

$$m\,x'' = P - C(x + \lambda_{ст}) - mA\omega^2\sin(\omega) \text{ или}$$

$$m\,x'' + Cx = -C\,\lambda_{ст} - mA\omega^2\sin(\omega) \qquad (2)$$

Так как колебания груза рассматриваем в системе координат с началом в точке статического равновесия груза, то $P = C\,\lambda_{ст}$. Разделим (2) на массу m, получим:

$$x'' + k^2x = -A\omega^2\sin(\omega), \qquad (3)$$

где обозначено: $k^2 = C/m = 100$ 1/с², $k = 10$ 1/с.

2. Для определения закона движения груза надо проинтегрировать

уравнение (3). Его общее решение, как известно из теории дифференциальных уравнений:

$$x = x_1 + x_2, \qquad (4)$$

где x_1 – общее решение однородного уравнения $x'' + k^2x = 0$, т.е.

$$x_1 = C^*_1 \sin(kt) + C^*_2 \cos(kt) \qquad (5)$$

а x_2 – частное решение уравнения (3). Учитывая, какова его правая часть, x_2 ищем в виде:

$$x_2 = B \sin(\omega t). \qquad (6)$$

Для определения постоянной B находим:

$$x_2'' = -B\omega^2 \sin(\omega t). \qquad (7)$$

Подставляя x_2 и x_2'' в уравнение (3), получим:

$$-B\omega^2 \sin(\omega t) + Bk^2 \sin(\omega t) = -A\omega^2 \sin(\omega), \quad (8)$$

или:

$$(-B\omega^2 + k^2B) = -A\omega^2.$$

Отсюда находим:

$$B = -A\omega^2/(k^2 - \omega^2) = A\omega^2/(\omega^2 - k^2) = 0{,}03\times 20^2/(20^2 - 10^2) = 0{,}04\text{м}.$$

Следовательно, решение (4) с учетом (5) – (8) запишем в виде:

$$x = C^*_1 \sin(10t) + C^*_2 \cos(10t) + 0{,}04\sin(20t). \quad (9)$$

Для определения постоянных C^*_1 и C^*_2 продифференцируем по t выражение (9):

$$v_x = x' = 10C^*_1 \cos(10t) - 10C_2 \sin(10t) + 0{,}8\cos(20t). \ (10)$$

По условиям задачи при t = 0

$$v_{xo} = v_o = 0{,}5\text{м/с}, \ x_o = \lambda_o - \lambda_{ст} = 0{,}002\text{м}.$$

Так как из полученного ранее $P = C\,\lambda_{ст}$, следует:

$$\lambda_{ст} = P/C = mg/C = 0{,}4\times 9{,}81/40 = 0{,}098\text{м}.$$

Подставив эти начальные данные в уравнения (9) и (10) получим:

$$C^*_2 = 0{,}002; \ \ 10C^*_1 + 0{,}8 = 0{,}5 \ (\sin 0 = 0; \cos 0 = 1); \ \ C^*_1 = -0{,}03.$$

В результате уравнение (9) окончательно примет вид:

$$x = -0{,}03 \sin(10t) + 0{,}002 \cos(10t) + 0{,}04\sin(20t).$$

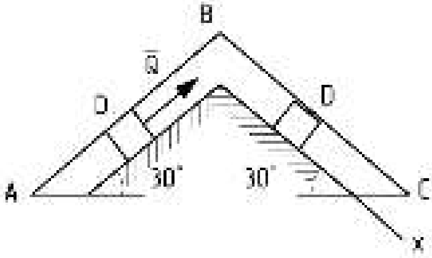
Это уравнение и определяет искомый закон относительного движения груза по отношению к движущемуся корпусу прибора, то есть закон совершаемых этим грузом колебаний.

Задача 2

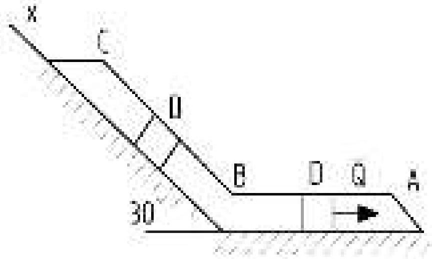
Тело D, имеющее массу m, получив в точке A начальную скорость v_o, движется в изогнутой трубе ABC расположенной в вертикальной плоскости (рис. 3.0 – 3.9). На участке AB на тело, кроме силы тяжести, действуют постоянная сила Q, направленная вдоль трубы, и сила трения. В точке B тело, не изменяя величины своей скорости, переходит на участок BC и движется, скользя по трубе. При этом на тело, кроме силы тяжести, действуют силы трения и переменная сила F, проекция которой F_x на ось x задана в табл.2. Там же для каждого рисунка даны m; v_o; Q; расстояние l = AB между точками A и B или τ – время движения тела от точки A до точки B и коэффициент трения f тела о трубу.

Считая тело материальной точкой, вычислить, на каком расстоянии x_1 от точки В будет находиться тело через 1с после начала движения из точки В, или какую скорость оно будет иметь в этот момент времени.

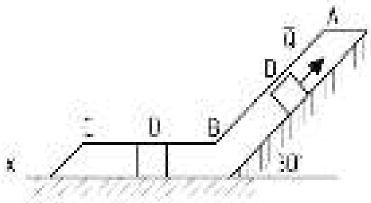
3.0



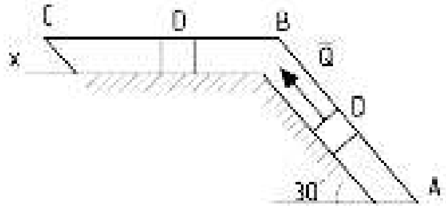
3.1



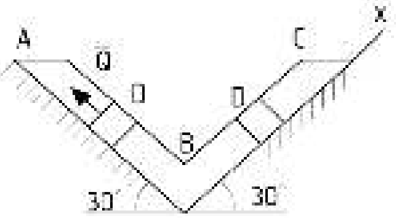
3.2



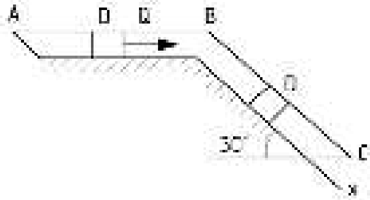
3.3



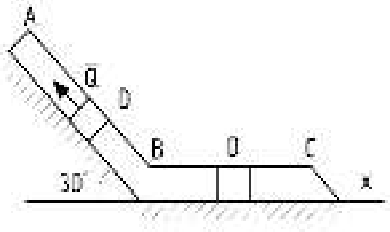
3.4



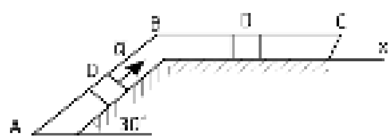
3.5



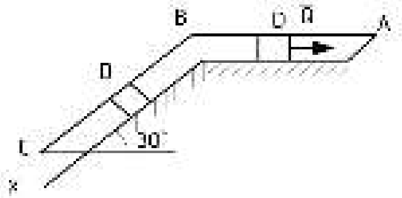
3.6



3.7



3.8



3.9

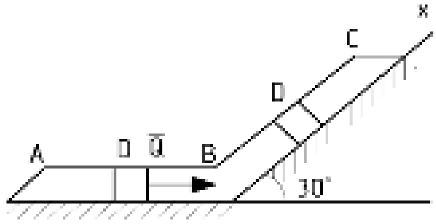


Рис. 3

Таблица 2

Вариант	m, кг	v_0, м/с	f	l, м	τ, с	F_x, Н	Q, Н	Найти
0	2,4	12	0,2	1,5	-	4sin(4t)	5	v_1
1	2	20	0,4	-	2,5	-5cos(4t)	6	x_1
2	8	10	0,3	4	-	6t	16	v_1
3	1,8	24	0,3	-	2	-2cos(2t)	5	x_1
4	6	15	0,2	5	-	-5sin(2t)	12	v_1
5	4,5	22	0,3	-	3	3t	9	x_1
6	4	12	0,1	2,5	-	6cos(4t)	10	v_1
7	1,6	18	0,4	-	2	-3sin(4t)	4	x_1
8	4,8	10	0,2	4	-	4cos(2t)	10	v_1
9	3	22	0,3	-	3	4sin(2t)	9	x_1

Указания. Задача 2 – на интегрирование дифференциальных уравнений движения точки (решение основной задачи динамики). Решение задачи разбивается на две части. Сначала нужно составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения точки D на участке АВ, учитывая начальные условия. Затем, зная время движения на участке АВ (τ) или его длину l, определить, какую скорость будет иметь тело в точке В. Эта скорость будет начальной для движения тела на участке ВС. После этого нужно составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения на участке ВС тоже с учетом начальных условий.

Пример решения задачи 2.

На вертикальном участке АВ трубы (рис.4) на груз D массой m действует сила тяжести и постоянная сила сопротивления R. Длина участка ВА l_1 = 2м. В точке А груз имеет начальную скорость v_0 = 6м/с. На наклонном участке ВС на груз действуют: сила тяжести, сила трения и переменная сила F = F(t), заданная в ньютонах.

Дано: m = 5кг; R = 40Н; v_0 = 6м/с; l_1 = 2м; $f_{тр}$ = 0,2; F_x = 45sin(3t).
Определить: x = f(t) – закон движения груза на участке ВС.

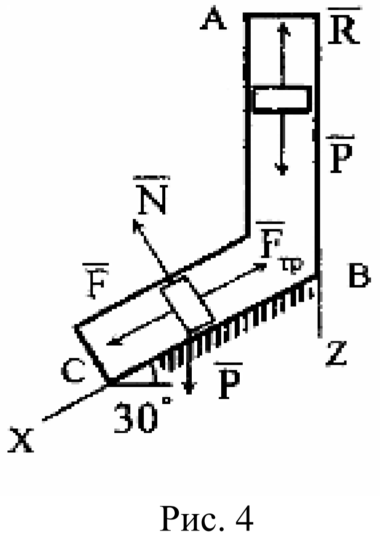


Рис. 4

Решение. 1. Рассмотрим движение груза на участке АВ, считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы P и R. Проводим ось Az и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m\nu_z' = \Sigma F_{kx} \quad \text{или} \quad m\nu_z' = P_z + R_z. \quad (1)$$

Далее находим $P_z = P = mg$, R_z;

При $\nu_z = \nu$

$$m\nu' = mg - R \text{ или } \nu' = g - R/m \quad (2)$$

При подсчете принято $g = 10\text{м/с}^2$. Тогда, разделяя в уравнении (2) переменные и интегрируя обе части равенства, получим:

$$\nu = (g - R/m) + C_1 = 2t + C_1. \quad (3)$$

Из начальных условий: $t = 0$, $\nu = \nu_o = 6$ получим $C_1 = \nu_o$. При найденном значении C_1 уравнение (3) принимает вид:

$$\nu = z' = 2t + 6. \quad (4)$$

Откуда при делении переменных и интегрировании получим:

$$z = t^2 + 6t + C_2. \quad (5)$$

Из начальных условий: $t = 0$, $z_o = 0$ находим $C_2 = 0$, отсюда

$$z = t^2 + 6t. \quad (6)$$

С учетом конкретных условий на участке АВ при $z = l_1$ можно найти время движения груза до точки В:

$$t^2 + 6t = 2 \text{ или } t^2 + 6t - 2 = 0.$$

Из корней уравнения $t_1 = 0{,}3$с; $t_2 = -6{,}3$с. Физический смысл имеет значение $t_{AB} = 0{,}3$с. Тогда по уравнению (4) скорость в точке В:

$$\nu_B = 2t + 6 = 6{,}6\text{м/с}. \quad (7)$$

2. Теперь рассмотрим движение груза на участке ВС; найденная скорость ν_B будет для движения на этом участке начальной скоростью ($\nu_o = \nu_B$). Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы P, N, F, $F_{тр}$. Проведем из точки В ось Bx и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m\nu_x = P_x + N_x + F_x + F_{тр\,x} \quad (8)$$

Так как $P_x = P\sin 30^o = 0{,}5mg$; $N_x = 0$; $F_x = 45\sin(3t)$; $F_{тр\,x}$ = $= -f_{тр}P\cos 30^o = -0{,}17mg$, то уравнение (8) примет вид:

$$m\nu_x' = 0{,}5mg + 45\sin(3t) - 0{,}17mg = 0{,}33mg + 45\sin(3t). \quad (9)$$

Разделив обе части равенства (9) на $m = 5$кг и полагая опять $g =$ $= 10\text{м/с}^2$, получим:

$$\nu_x' = 3{,}3 + 9\sin(3t). \quad (10)$$

Умножая обе части уравнения (10) на dt и интегрируя, найдем:

$$\nu_x = 3{,}3t - 3\cos(3t) + C_2. \quad (11)$$

Будем теперь отсчитывать время от момента, когда груз находится в точке В, считая, сто в этот момент $t = 0$. Тогда при $t = 0$, $\nu = \nu_o = \nu_B$, где ν_B дается равенством (7). Подставляя эти величины в (11) получим:

$$C_2 = \nu_B + 3\cos 0^o = 6{,}6 + 3 = 9{,}6.$$

При найденном значении C_2 уравнение (11) дает:

$$\nu_x = x' = 3{,}3t - 3\cos(3t) + 9{,}6. \quad (12)$$

Умножая обе части на dt и снова интегрируя, найдем:

$$x = 1{,}65t^2 + 9{,}6t - \sin(3t) + C_3. \qquad (13)$$

Так как при $t = 0$ $x = 0$, то $C_3 = 0$ и окончательно искомый закон движения груза можно представить следующим образом:

$$x = 1{,}65t^2 + 9{,}6t - \sin(3t),$$

где x – в метрах, t – в секундах.

При $t = 1$с из (12) $v_x = v_1 = 9{,}93$м/с; из (14) $x = x_1 = 11{,}11$м.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

4. Покровский В.В. Механика. Методы решения задач. [текст]: учебное пособие/. В.В. Покровский. – изд –во «Лаборатория знаний», 2015 -256с.
Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/84100#book_name
5. Молотников В.Я. Техническая механика. [текст]: учебное пособие/. В.Я. Молотников. – изд – во «Лань», 2017 – 476с.
Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/91295#book_name
6. Расчёт и конструирование деталей машин: тексты лекций [Электронный ресурс] / Р.А. Усманов - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. – 168с.
Режим доступа: http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785788216454.html